MŰEGYETEM 1782

SÍKBELI RÁCSOS TARTÓK GEOMETRIAI ÉRZÉKENYSÉGE

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszékén
a PhD fokozat követelményeinek részleges teljesítéseként benyújtott

PHD DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Tóth Krisztina
okleveles építészmérnök

Témavezető:
Domokos Gábor

Budapest
2014.

TARTALOMJEGYZÉK

TARTALOMJEGYZÉK…… 1

1. BEVEZETÉS…… 3

1.1.AZ ÉRTEKEZÉS ALAPVETŐ CÉLKITŰZÉSEI ÉS A GRÁF-MODELL……..... 3
1.2.MEREVSÉGI PROBLÉMÁK ÉS A GRÁF-MODELL KAPCSOLATA……..... 6
1.2.1. Merevség és generikus merevség.
Minimális és redundáns merevség …… 6
1.2.2. A minimális generikus merevség feltételei. Rúdpótlás
Hogyan konstruáljunk minimálisan generikusan merev tartót?.....… 8
1.2.3. Egyszerű és összetett rácsos tartók……. 12
1.3.ERŐTANI PROBLÉMÁK ÉS A GRÁF-MODELL KAPCSOLATA …..…….. 13
1.4.ERŐTANI ÉS MEREVSÉGI PROBLÉMÁK KAPCSOLATA ……... 14
1.5.RÉSZLETES KUTATÁSI CÉLOK ÉS EREDMÉNYEK …….…… 15

2. SÍKBELI RÁCSOS TARTÓK GEOMETRIAI ÉRZÉKENYSÉGE….…… 18

2.1.A FELADAT MEGHATÁROZÁSA…….....……. 18
2.1.1. Geometriai tökéletlenség, befolyásolt zóna, geometriai érzékenység…….... 18
2.1.2. Alapfeltevések és néhány alapfogalom…….…….... 19
2.2.A BEFOLYÁSOLT ZÓNA KOMBINATORIKUS KIJELÖLÉSE……... 20
2.2.1. A módszer gondolatmenete és kulcsfogalmai: aktív zóna, merev mag……. 20
2.2.2. Befolyásolt zóna – aktív zóna…… 21
2.2.3. Aktív zóna – merev mag (minimálisan merev tartók) …… 25
2.2.4. Aktív zóna – merev mag (redundánsan merev tartók)…… 25
2.2.5. Sajátfeszültségi zóna – merev mag…….…… 30
2.2.6. Merev mag – gráf-modell…….…….…….…… 31
2.2.7. A zónák intuitív kijelölésére szolgáló algoritmusok…….……. 33
2.2.8. Aktív zóna és a rúdpótlás: a rúdpótlás új megfogalmazása…… 35
2.2.9. Diszkusszió…….....……. 36
2.3.GEOMETRIAI ÉRZÉKENYSÉG……... 38
2.3.1. Minimális és maximális érzékenységű minimálisan merev rácsos tartók……. 38
2.3.2. A rúdszám növelésének hatása…….…… 41
2.3.3. Statikailag határozott rácsostartó-családok érzékenysége…… 42
2.3.4. Mérnöki rácsos tartók, atipikus feladatok…….... 51
2.4.ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK: 1. ÉS 2. TÉZIS…… 54

3. TÖKÉLETLENÜL SZIMMETRIKUS, OPTIMÁLIS RÁCSOS TARTÓK…… 56

3.1.MOTIVÁCIÓ, ELŐZMÉNYEK, KUTATÁSI CÉL…….. 56
3.2.GLOBÁLIS ÉS LOKÁLIS OPTIMÁLÓ KRITÉRIUM…… 59
3.3.LOKÁLIS OSZTÁLYOZÁS:
TIPIKUS ESETEK ÉS NEUTRÁLIS VISELKEDÉS …… 61
3.4.PÉLDÁK NEUTRÁLIS VISELKEDÉSRE…… 63
3.5.DISZKUSSZIÓ ÉS
A NEUTRÁLIS VISELKEDÉS ESÉLYÉT NÖVELŐ TÉNYZŐK…….. 64
3.6.ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNY: 3. TÉZIS…….. 65

4. VAKRUDAK NEMLINEÁRIS VISELKEDÉSE…… 67

4.1.VAKRUDAK: DEFINÍCIÓ, KIJELÖLÉS, TARTÓSZERKEZETI SZEREP…….. 67
4.2.VAKRUDAK ERŐJÁTÉKA, KÉRDÉSFELVETÉS…… 68
4.3.TIPIKUS VAKRUDAK……. 68
4.3.1. Tipikus vakrudak viselkedése…… 68
4.3.2. Számpélda…… 69
4.3.3. Az előjelek intuitív meghatározása…….. 70
4.4.MAGASABB RENDŰ VISELKEDÉS: EGY DEGENERÁLT PÉLDA…….. 72
4.5.DISZKUSSZIÓ…….. 75
4.6.ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNY: 4. TÉZIS…….. 76

5. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK…… 77

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS…… 81
A TÉZISEKHEZ KAPCSOLÓDÓ PUBLIKÁCIÓK……. 81
EGYÉB PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN……. 82
HIVATKOZÁSOK……. 82
MELLÉKLETEK…….. 84
1. sz. melléklet: JELÖLÉSRENDSZER……..... 84
2. sz. melléklet: RÁCSOS TARTÓKKAL KAPCSOLATOS FOGALMAK…….. 85
3. sz. melléklet: GRÁFELMÉLETI FOGALMAK…….. 87
4. sz. melléklet: SEGÉDTÉTELEK ÉS BIZONYÍTÁSUK……. 88
5. sz. melléklet: A FELHASZNÁLT FÉNYKÉPEK FORRÁSAI……89
6. sz. melléklet: EGY HARMADRENDBEN ELFAJULT VAKRÚD RENDJÉNEK MEGATÁROZÁSA KÉZI KÖZELÍTŐ MÓDSZERREL, SORFEJTÉSSEL…...90

1

BEVEZETÉS

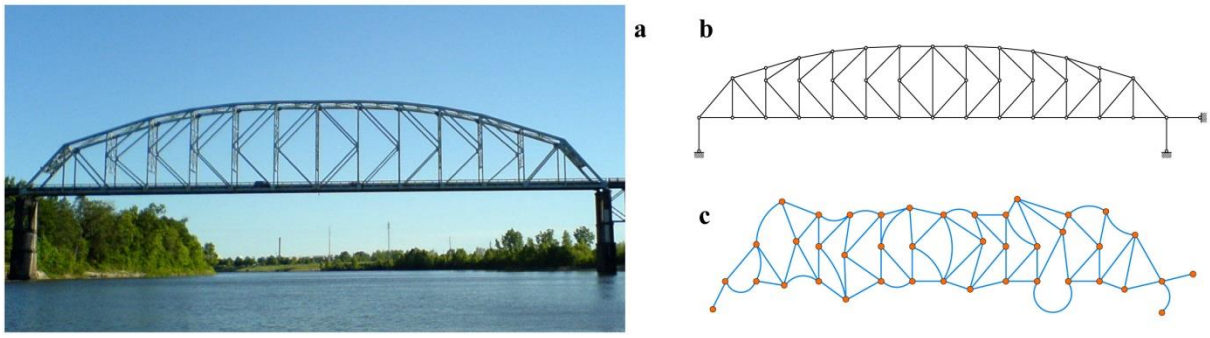
Mottó:
„A rajz a mérnök nyelve.”
(Korányi 1953)

1.1. AZ ÉRTEKEZÉS ALAPVETŐ CÉLKITŰZÉSEI ÉS A GRÁF-MODELL

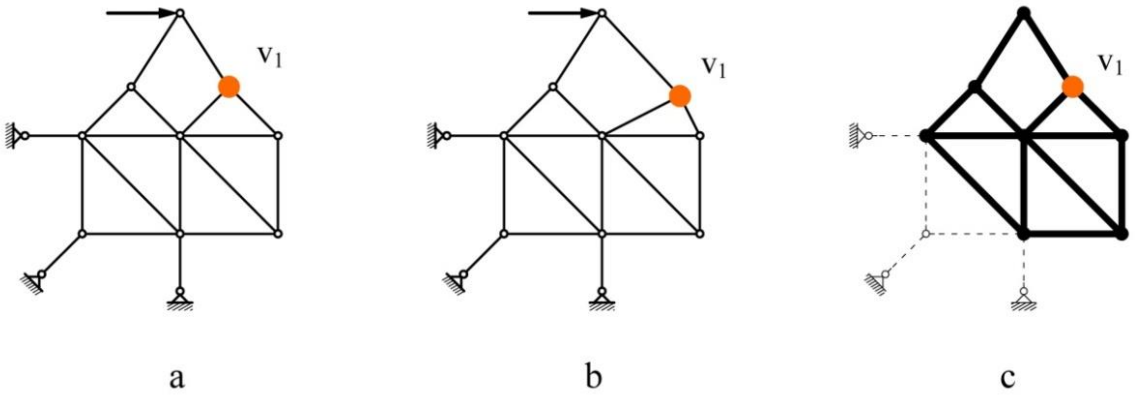
A tartószerkezet-tervező mérnökök előszeretettel alkalmaznak rácsos tartókat nagyobb fesztávolságok áthidalására, például hidak céljára (1.1a ábra). A jelen dolgozatban *síkbeli* rácsos tartók erőjátékát érintő kérdéseket vizsgálunk.

Mint ismert, a szerkezetek tervezett és megvalósult geometriája kis mértékben eltér egymástól gyártási és/vagy kivitelezési pontatlanságok miatt. Például míg a tervrajzokon a rudak tökéletesen egyenesek és a csomóponti rúdbekötések tökéletesen központosak, addig a valóságban rudak kissé görbék és a csomópontoknál külpontosan csatlakoznak. Ezek a pontatlanságok, geometriai tökéletlenségek a rácsos tartókban másodlagos igénybevételeket – nyomatékokat – idéznek elő.

A jelen dolgozatban egy további geometriai pontatlansággal foglalkozunk: adott csomópont helyzetének tökéletlenségével. Akár a kivitelezés vagy a gyártás pontatlansága (a gyakorlatban ilyen például a rúdhosszak pontatlansága), akár egy utólagos átépítés azt eredményezheti, hogy a rácsos tartó valamely csomópontja az eredetileg tervezettől kissé eltérő helyzetbe kerül (1.2a-b ábra). Az értekezésben azt vizsgáljuk, hogy egy csomópontjain terhelt, síkbeli rácsos tartóban egy terheletlen csomópont helyzetének módosítása (megzavarása) a tartó mely rúdjaiban idézi elő a *rúderők megváltozását*. Ezen utóbbi rudak halmazát (a kapcsolódó csomópontokkal együtt) az adott csomópont *befolyásolt zónájá*nak nevezzük (1.2c ábra).



1.1. ábra. Rácsos szerkezetű híd (a) és annak különböző modelljei: statikai modell (b) és gráf-modell (c).
(A statikai modellen a megtámasztó kényszereket csuklós rudakkal modelleztük.)



1.2. ábra. A geometriai tökéletlenség és a befolyásolt zóna.
Egy tetején terhelt rácsos tartó geometriája a v_1 jelű csomópont geometriai tökéletlensége előtt (a), illetve után (b). A v_1 csomópont befolyásolt zónáját a (c) ábrán vastag vonalak és teli körök jelzik.

Eme feladat megoldása során azt is vizsgálni fogjuk, hogy egy adott csomóponthalmazon működő külső egyensúlyi erőrendszer hatására mely rudakban *keletkezik rúderő*, illetve hogy egy statikailag határozatlan tartó mely rúdjaiban *léphet fel sajátfeszültség*.

Az utóbbi két rúdhalmaz a vakrudak azonosításában, illetve a kinematikai terhekre érzékeny rudak kijelölésében segíthetik a szerkezettervező mérnököket, míg a befolyásolt zóna egy utólagos szerkezet-átalakítás során lehet hasznos: az átalakítás miatt bekövetkező csomóponti tökéletlenség következtében új statikai ellenőrzés és rúderőszámítás válik szükségessé, amely probléma méretét azonban a befolyásolt zóna előzetes ismerete csökkentheti.

Habár úgy tűnhet, hogy az imént említett három erőtani kérdés megválaszolásához geometriai és terhelési adatokra, valamint rúderőszámításra van szükség, bemutatjuk, hogy azok megválaszolhatók metrikus adatok megadása és szerkezeti analízis nélkül, pusztán a tartó *gráf-modell*jének ismeretében, kombinatorikus eszközökkel is. A tartó gráf-modelljének azt a gráfot nevezzük, amely a tartó csomópontjainak szomszédsági viszonyait írja le (1.1c ábra): a csuklókat modellező csomóponthalmazból és a rudakat modellező élhalmazból áll, jele: *G*. A statikai modellel ellentétben (1.1b ábra) a gráf-modell nem tartalmaz metrikus információkat: csomópontjai tetszőleges helyzetűek, élei tetszőleges alakúak lehetnek.

A kitűzött feladatot úgy fogjuk megoldani, hogy az eredetileg az erőjátékra vonatkozó problémákat merevségi feladatokra vezetjük vissza, amelyekről könnyen belátható, hogy merev (előfeszítés nélküli) tartók esetén elvégezhetők pusztán a gráf-modell vizsgálatával, kombinatorikus eszközökkel. Az ilyen eszközök alkalmazása egyrészt nagyságrendekkel gyorsíthatja a szerkezeti vizsgálatot, másrészt alkalmas arra, hogy a jelenség lényegét egyszerűen átláthassuk. Ezáltal eredményeink segíthetik a rácsos tartók erőjátékának mélyebb megértését, és az ilyen típusú szerkezetek tervezését, ellenőrzését is.

Természetesen léteznek más módszerek is, melyekkel a keresett rúdhalmazok meghatározhatók metrikus adatok és rúderőszámítás nélkül – statikailag határozott tartók esetén például a statikai egyenletek elemzésével. Ez utóbbi módszer esetén azonban egy mátrix (a csomóponti egyensúlyi mátrix) felépítését kell vizsgálni, amely talán kevésbé szemléletes egy tervező mérnök számára, mint a grafikus formátumú gráf, lásd a Bevezetés mottóját.

Arra is keressük a választ, hogy az említett csomóponti zavarásokra milyen típusú rácsos tartók érzékenyek, illetve kevésbé érzékenyek. Ennek jellemzésére bevezetjük a *rácsos tartó geometriai érzékenységi indexé*nek – röviden érzékenységének – fogalmát, melyet úgy kapunk, hogy a tartóban átlagoljuk a befolyásolt zónák rúdszámát és ezt osztjuk a tartó rúdszámával. Ez a 0 és 1 közötti mérőszám megmutatja, hogy egy szerkezet átlagosan mennyire érzékeny kis csomóponti hibákra, tökéletlenségekre. Ezen eredményeink segíthetik a szerkezettervezőket, hogy a geometriai tökéletlenségekre kevéssé érzékeny tartókat tervezzenek. (Megjegyezzük, hogy a rugalmas szerkezetek geometriai tökéletlenségekre való érzékenységét a katasztrófa-elmélet segítségével is tanulmányozták már *(Gáspár 2005)* a posztkritikus viselkedés előrejelzése valamint a bifurkációk vizsgálata céljából. Ez utóbbi vizsgálatokban – a jelen dolgozatban használt jelentéstől eltérően – egy szerkezetet akkor hívnak *érzékeny*nek, ha a geometria kis megváltoztatása radikálisan lecsökkenti a kritikus teher értékét.)

Egy csomópont helyzetének megzavarása nem csupán az erőjáték megváltozása miatt lehet érdekes, hanem optimumkeresés szempontjából is. Az értekezésben megvizsgáljuk, hogy vajon lehet-e javítani a statikailag határozott, tükörszimmetrikus rácsos tartók viselkedésén kis csomóponti zavarással, más szóval létrehozhatók-e *kissé aszimmetrikus, optimális rácsos tartók*. A mérnöki intuíció szerint a szimmetrikus szerkezeti alak kedvezőbb, mint annak kissé aszimmetrikus verziója. Eme intuíciót támasztja alá tudományosan a *(Várkonyi és Domokos 2006)* is: tipikus esetekben a szimmetrikus alak optimális, és kissé aszimmetrikus optimális szerkezetek nem léteznek. Eredményeinket eme kutatási előzménnyel vetjük össze.

Az értekezés végén az erőjátékban részt nem vevő rudakkal, vagyis a vakrudakkal is foglalkozunk. Habár az elsőrendű elmélet szerint az ilyen rudakban az adott teher hatására nem ébred rúderő, a nemlineáris elmélettel már a bennük lévő rúderők is kimutathatók. Arra keressük a választ, hogy a *vakrudak nemlineáris vizsgálata* alapján milyen tartószerkezeti következtetések vonhatók le.

A dolgozat felépítése a következő. Az *1. fejezet* következő szakaszaiban olyan ismert, mérnöki problémákat mutatunk be, amelyek rávilágítanak a síkbeli rácsos tartók erőjátéka, merevsége és gráf-modellje között fennálló kapcsolatra, továbbá röviden összefoglaljuk az értekezés céljait és az elért eredményeket. A *2. fejezet*ben a befolyásolt zóna kombinatorikus kijelölésével és a rácsos tartók geometriai érzékenységével foglalkozunk. A *3. fejezet* a kissé aszimmetrikus, optimális rácsos tartókat tanulmányozza. A *4. fejezet*ben a vakrudak nemlineáris viselkedéséről írunk. Az *5. fejezet*ben összefoglaljuk az eredményeket és ismertetjük az új tudományos eredményeket. Az értekezést végül a Köszönetnyilvánítás, a Publikációk, a Hivatkozások és a Mellékletek zárják. A Mellékletekben kigyűjtöttük a tárgyalás során használt jelölésrendszert és a rácsos tartókkal kapcsolatos fogalmakat, megadjuk a dolgozatban használt – a mérnöki szakmában talán kevéssé ismert – gráfelméleti fogalmakat, továbbá ismertetjük a Segédtételeket és azok bizonyítását.

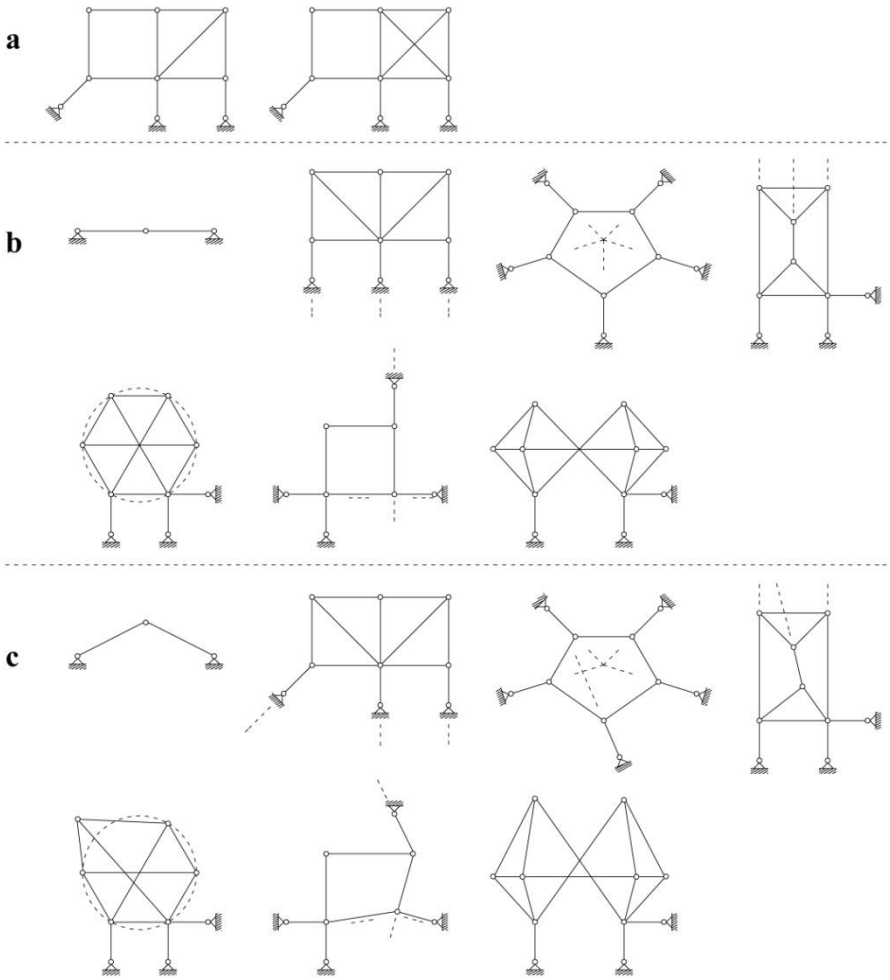
A továbbiakban a „rácsos tartó” fogalma alatt *síkbeli* rácsos tartót értünk.

1.2.MEREVSÉGI PROBLÉMÁK ÉS A GRÁF-MODELL KAPCSOLATA

1.2.1. Merevség és generikus merevség. Minimális és redundáns merevség.

A jelen szakaszban a gráf-modellnek a merevségi kérdéscsoportban betöltött szerepére mutatunk rá.

A merevség fogalmát a következő értelemben használjuk: *merev*nek nevezünk egy (előfeszítés nélküli) tartót, ha – a merevtestszerű mozgásoktól eltekintve – nincsenek infinitezimális vagy véges szabad elmozdulásai, vagyis a szerkezet kinematikailag nem határozatlan *(Tarnai 1990).* A merevség hiánya lehet topológiai eredetű (azaz a metrikus adatoktól független) illetve geometriai eredetű is. Az előbbi esetben a kevés számú, vagy nem megfelelő csomópontok közé elhelyezett rúd okozza a problémát (1.3a ábra), míg az utóbbi esetben a degenerált, speciális geometria (1.3b ábra). A merevségnek tehát *topológiai és geometriai feltételei* is vannak: a szerkezet merevségéhez mindkét feltétel teljesítése szükséges.



1.3. ábra. Merev és nem merev szerkezetek.
Topológiai okokból nem-merev szerkezetek (a): a merevség hiányát az első esetben a kevés számú rúd, a második esetben a nem megfelelő helyre elhelyezett rúd idézi elő. Generikusan merev, de nem-merev szerkezetek (b): a merevség hiánya a speciális geometria következménye. Generikusan merev és egyben merev szerkezetek (c).

Könnyen belátható tehát, hogy a topológiai feltételek önmagában a tartó gráf-modelljének ismeretében ellenőrizhetőek. A topológiai feltételeket teljesítő rácsos tartókat *generikusan merev* tartóknak hívjuk (1.3b-c ábrák). Az ilyen tulajdonságú tartók „majdnem minden" geometria esetén merevek, vagyis azok a geometriák, melyek esetén a tartó nem merev, csupán nullmértékű halmazt alkotnak. Például a 1.3b ábrán bemutatott szerkezetek generikusan merevek, de geometriai okokból nem merevek.

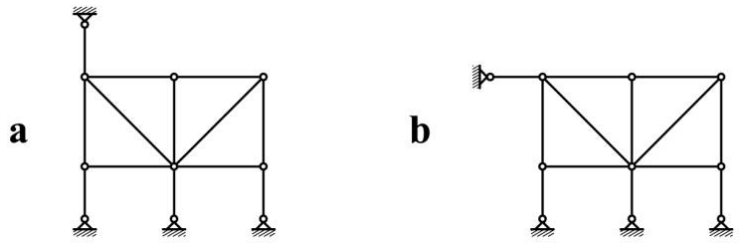
A merev szerkezetek között megkülönböztetünk *éppen merev* (más néven *minimálisan merev*), illetve *túlmerev* tartókat (1.3c és 1.4a ábra) *(Tarnai 1990; Jordán és szerzőtársai 2004)*. Egy szerkezetet minimálisan merevnek nevezünk, ha…:

1. definíció: … merev, de bármely rúdját eltávolítva megszűnik a merevsége (tehát a tartónak csak *szükséges rúd*jai vannak).
2. definíció: … statikailag határozott, vagy – ha a tartó nincs megtámasztva – 3 darab támaszrúddal statikailag határozottá tehető.

Egy szerkezetet túlmerevnek nevezünk, ha…:

1. definíció: … merev, és létezik olyan rúdja, amely eltávolítható anélkül, hogy a tartó elvesztené merevségét (tehát a tartónak van *fölös rúd*ja is).
2. definíció: … statikailag határozatlan (és egyben kinematikailag túlhatározott), vagy – ha a tartó nincs megtámasztva – 3 darab támaszrúddal statikailag határozatlanná (és egyben kinematikailag túlhatározottá) tehető.

A jelen értekezésben a túlmerev tartókat *redundánsan merev* tartóknak fogjuk nevezni.



1.4. ábra. Redundánsan generikusan merev szerkezetek.
Redundánsan generikusan merev, de geometriai okokból nem-merev szerkezet (a): a merevség hiánya a speciális geometria következménye. Redundánsan generikusan merev és egyben merev szerkezet (b).

Hasonlóan a merevséghez, a minimális és a redundáns merevségnek is vannak topológiai feltételei, és ez alapján beszélhetünk minimálisan generikusan merev és redundánsan generikusan merev szerkezetekről is. *Minimálisan generikusan merev* szerkezetek generikusan merevek, de bármely rúdjukat eltávolítva megszűnik a generikus merevségük (1.3b-c ábrák) *(Jordán és szerzőtársai 2004)*. A jelen értekezésben *redundánsan generikusan merev*nek fogjuk nevezni azokat a szerkezeteket, amelyek generikusan merevek, és létezik olyan rúdjuk, amely eltávolítható anélkül, hogy a szerkezet elvesztené a generikus merevségét (1.4a-b ábrák). (Fontos megjegyeznünk azonban, hogy a matematikusok a redundáns merevség és a

redundáns generikus merevség fogalmát a jelen értekezésben ismertetett jelentéstől eltérően használják, lásd a 3. számú Mellékletet.)

A fentiek alapján elmondható tehát, hogy a gráf-modell – majdnem minden geometria esetén – önmagában alkalmas a tartó merevségének megállapítására.

A gráf-modell alapján továbbá a tartó fölös rúdjainak száma is meghatározható, ami a statikailag határozatlan, előfeszítés nélküli merev rácsos tartókban azonos a statikai határozatlanság fokával.

1.2.2. A minimális generikus merevség feltételei. Rúdpótlás. Hogyan konstruáljunk minimálisan generikusan merev tartót?

A jelen szakaszban a síkbeli rácsos tartók minimális generikus merevségével foglalkozunk részletesen: ismertetjük annak feltételeit, valamint hogy hogyan konstruálhatók ilyen tulajdonságú tartók. Eme feltételeknek kiemelt jelentőségük lesz a befolyásolt zóna kombinatorikus meghatározása során, minthogy a zónát a tartó alkalmasan kijelölt minimálisan generikusan merev részeinek fogjuk megfeleltetni.

A minimális generikus merevség feltételeinek a kutatását Maxwell *(1864)* indította el, aki egy szükséges feltételt adott: a rúdszámszabályt. Eszerint megtámasztás nélküli tartókban: $r=2c-3$, illetve megtámasztott tartókban: $r=2c$, ahol c a (fix környezettel nem érintkező) csuklók száma, r a rúdszám.

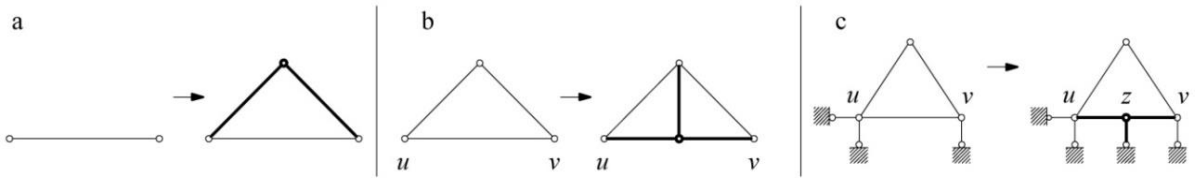
Maxwellt két mérnök, Henneberg *(1886, 1911)* és Müller-Breslau *(1891/92)* követte, akik már szükséges és egyben elégséges feltételt adtak közre: mindketten kidolgoztak egy-egy (egymással egyenértékű) *univerzális* minimálisan merev rácsostartó-generáló *algoritmust*, vagyis olyan algoritmust, mellyel bármely minimálisan merev rácsos tartó előállítható.

Henneberg *(1911)* tétele szerint egy síkbeli rácsos tartó akkor és csak akkor minimálisan generikusan merev, ha felépíthető egyetlen rúdból kiindulva az alábbi két művelet alkalmazásával:

– két meglévő csomóponthoz egy új csomópontot kapcsolunk két új rúddal (1.5a ábra)

– egy meglévő u-v rúdba beiktatunk egy új csomópontot, amit egy (az u és v csomópontoktól eltérő) meglévő csomóponthoz kapcsolunk egy új rúddal (1.5b ábra)

Az első műveletet Henneberg 1-es (röviden H1) műveletnek vagy csúcshozzáadásnak nevezik, míg a második műveletet Henneberg 2-es (röviden H2) műveletnek vagy élhasításnak hívják *(Haas és szerzőtársai 2005)*.

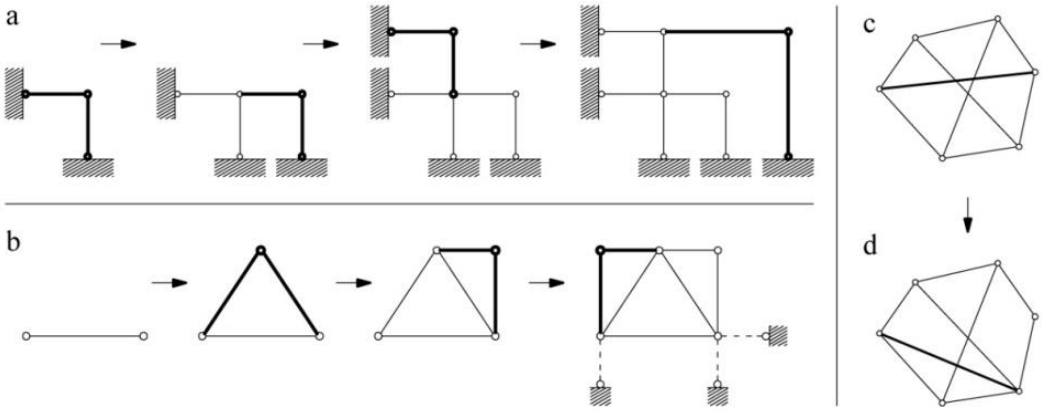


1.5. ábra. Henneberg műveletek.

A H1 (a) és H2 (b) művelet, valamint egy a H2-vel egyenértékű művelet (c).

Habár Henneberg tétele csupán megtámasztás nélküli rácsos tartókra vonatkozik, két kismértékű változtatással könnyen általánosítható megtámasztott tartókra is: egyfelől megengedjük, hogy a tartógeneráló algoritmust akár a megtámasztó környezetből is el lehessen indítani, illetve bevezetünk egy a H2-vel egyenértékű műveletet, amely a megtámasztott tartókban alkalmazható, lásd az 1.5c ábrát. Ez utóbbi műveletet a *(Servatius és szerzőtársai 2010)*-ben szintén élhasításnak nevezik.

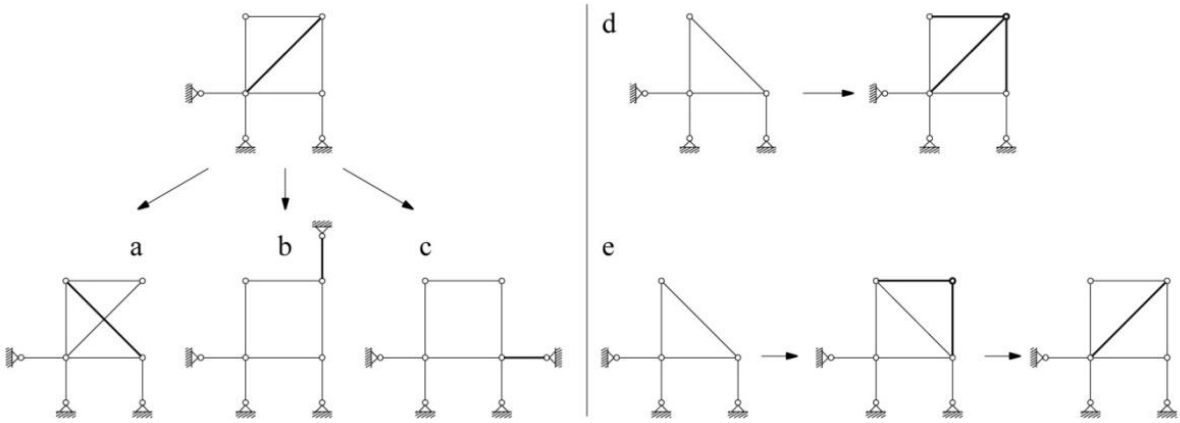
Müller-Breslau (1891/92) ezzel szemben olyan feltételt adott, amely megtámasztott tartókra is alkalmazható. Az általa kidolgozott univerzális algoritmus szintén két műveletet tartalmaz: a H1 művelettel ekvivalens ún. *háromszögképzés* műveletét (1.6a-b ábra), illetve a *rúdpótlás* (más néven rúdcsere) műveletét *(Csonka 1954, Korányi 1953)* (1.6c-d ábra).



1.6. Minimálisan merev rácsos tartók előállítása.
Egy tiszta háromszögképzéssel előállított (a), és egy vegyes háromszögképzéssel előállított tartó (b). Az ún. Pascal hatszög (c) *(Müller-Breslau 1913)* egy nem háromszögképzéses (komplex) tartó, ami azonban rúdcserével háromszögképzésűvé alakítható (d).

A háromszögképzésnek két típusa van: a *tiszta* (1.6a ábra) és a *vegyes* háromszögképzés (1.6b ábra). Mindkét esetben a csúcshozzáadás műveletét alkalmazzuk. A tiszta háromszögképzés során a fix környezetből indulunk ki, és így kapunk egy megtámasztott tartót. A vegyes háromszögképzés során egyetlen rúdból indulunk ki, és egy megtámasztás nélküli merev tárcsát hozunk létre, amelyet végül három megfelelő rúddal akár megtámaszthatunk.

A rúdpótlás művelete során (1.6c-d és 1.7a-c ábrák) egy merev tartóból eltávolítunk egy (szükséges) rudat, aminek következtében egy egyparaméteres szabad külső mozgás jön létre a szerkezetben, majd egy új rudat iktatunk be egy másik helyre úgy, hogy ez a mozgás megszűnjön. Az új rúd tehát merevség szempontjából pótolja az eltávolított rudat. Kérdés azonban, hogy két rúd mikor pótolja egymást. A *(Korányi 1953)*-ban erre két, egymással egyenértékű feltétel található. A *kinematikai feltétel* szerint akkor és csak akkor pótolják egymást, ha a tartónak azt a relatív mozgását, melyet az egyik rúd helyén alkalmazott nullértékű erőpár idézne elő, a másik rúd megakadályozza. Az *erőtani feltétel* szerint pedig akkor és csak akkor, ha az egyik rúd helyén alkalmazott nullértékű (azaz egyensúlyi) erőpár a másik rúdban erőt ébreszt.



1.7. Rúdpótlás.
Egy helyesen végrehajtott (a), illetve két helytelenül (b és c ábra) végrehajtott rúdpótlás.
A H2 művelet (d) egy H1 művelet és egy rúdcsere egymás utáni alkalmazásának (e) felel meg.

A kinematikai feltétel a következőképpen ellenőrizhető: először a rúd eltávolítása után létrejött, nem-merev szerkezetben azonosítani kell a legnagyobb, egybefüggő, merev tárcsaként működő tartórészeket – ezeket a továbbiakban nevezzük *merev összetevők*nek. Ezek egymáshoz képest szabadon el tudnak mozdulni. Ahhoz hogy ez az egyparaméteres szabad külső mozgás megszűnjön, az új rudat két (tetszőleges) merev összetevő közé kell beiktatni, hiszen egy merev összetevőn belül elhelyezett rúd nem szüntetné meg a szabad mozgást. Vegyük észre: a rúdpótlás nem csak minimálisan merev tartókban hajtható végre, hanem redundánsan merev tartókban is. Ekkor természetesen csak szükséges rúd pótlása esetén van értelme a feladatnak.

Müller-Breslau azt mutatta ki, hogy bármely minimálisan generikusan merev rácsos tartó vagy háromszögképzésű, vagy nem az, de rúdpótlással azzá alakítható (1.6c-d ábra). Tekintve, hogy a rúdpótlás művelete megfordítható, állításából egyenesen következik, hogy minden tartó előállítható a háromszögképzés és rúdpótlás műveletével, azaz e két művelet is univerzális algoritmust alkot.

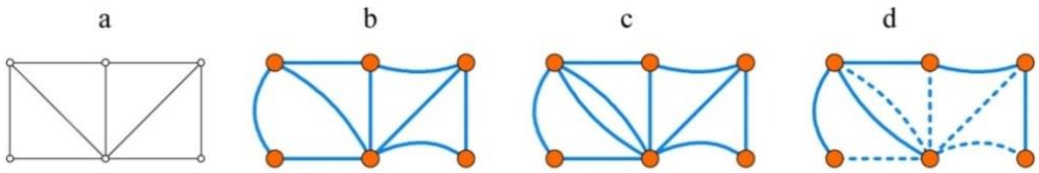
Érdemes megfigyelni, hogy Henneberg illetve Müller-Breslau univerzális algoritmusaiban szereplő elemi műveletek egyik irányban megfeleltethetőek egymásnak: a H1 művelet a háromszögképzésnek felel meg, míg a H2 művelet egy H1 művelet és egy rúdcsere egymás utáni alkalmazásával azonos (1.7d-e ábra).

A minimális generikus merevség feltételeivel matematikusok is foglalkoztak, akik eredményeiket jellemzően megtámasztás nélküli rácsos tartók gráf-modelljére mondták ki. Az ezek megértéséhez szükséges gráfelméleti fogalmakat a 3. számú Mellékletben ismertetjük.

Elsőként Laman fogalmazott meg egy szükséges és elégséges kombinatorikai feltételt. *Laman (1970) tétele* szerint egy e számú éllel és egy v számú csomóponttal rendelkező gráf akkor és csak akkor minimálisan generikusan merev a síkban, ha az $e=2v-3$ egyenlőségen kívül az is teljesül, hogy bármely *részgráf*ja legfeljebb $2v'-3$ élt tartalmaz, ahol v' a részgráf

csomópontjainak számát jelöli *(Jordán és szerzőtársai 2004; Nagy és Recski 1998)*. Mérnöki nyelvezetre lefordítva: egy síkbeli rácsos tartó akkor és csak akkor minimálisan generikusan merev, ha a rúdszámszabály mellett teljesül az is, hogy a tartó bármely olyan része, amely úgy áll elő, hogy a tartónak vesszük egy csomóponthalmazát, és az azok között futó rudakat (ennek a tartórésznek jelölje *v*' a csomópontszámát), legfeljebb 2*v*'-3 rudat tartalmaz. Annak eldöntése azonban, hogy a gráf minimálisan generikusan merev-e, exponenciális számú lépést igényelne a Laman-féle feltétel alkalmazásával, hiszen minden részgráfot meg kell vizsgálni *(Nagy és Recski 1998)*.

Ezzel szemben Lovász és Yemini *(1982)* szükséges és egyben elégséges feltételével egy gráf minimális generikus merevsége már polinomiális számú lépésben megállapítható *(Nagy és Recski 1998)*. *Lovász és Yemini (1982) tétele* kimondja, hogy *v* számú csomópontot és 2*v*-3 élt tartalmazó gráf akkor és csak akkor minimálisan merev, ha bármely élét megduplázva az így kapott gráfnak van két *feszítőfá*ja, amelyek közös élt nem tartalmaznak (1.8 ábra).

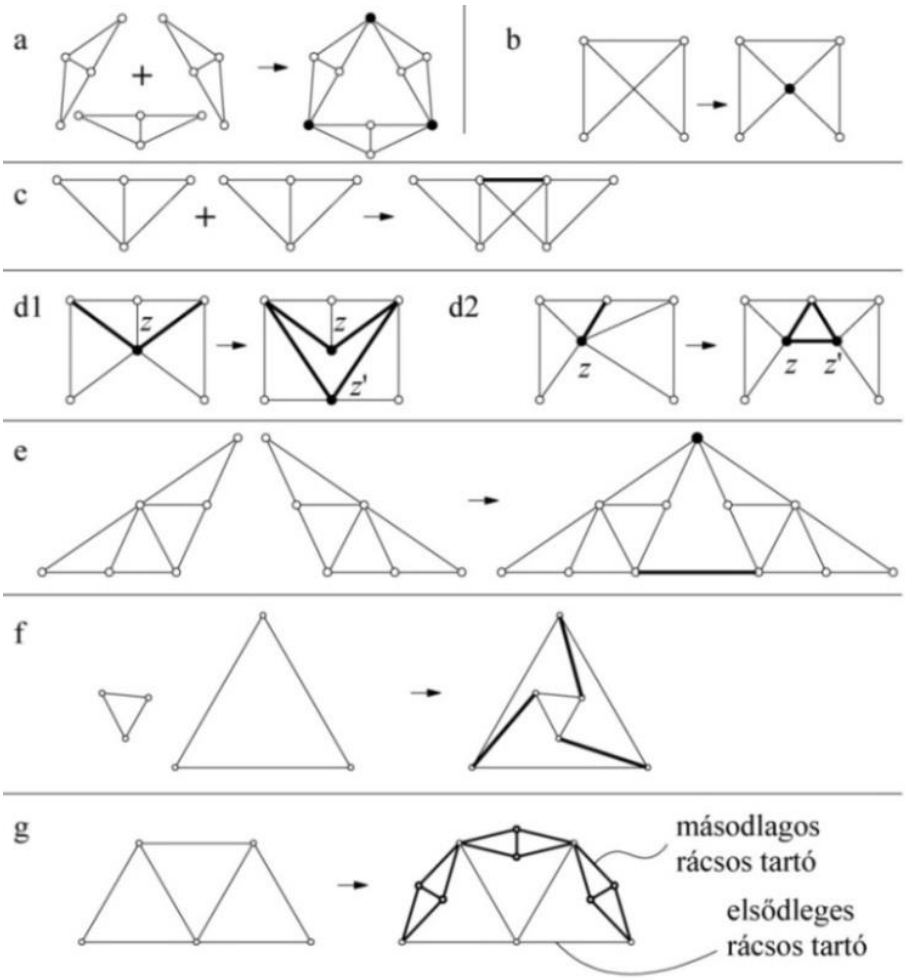


1.8. Lovász és Yemini tételének szemléltetése.
Egy rácsos tartó (a) minimálisan generikusan merev, ha a tartó gráf-modelljében (b) megkettőzve bármely élt (c) az így kapott gráfot ketté tudjuk bontani két olyan feszítőfává, melyek közös élt nem tartalmaznak (d) (lásd a folytonos, illetve a szaggatott vonalakkal meghatározott gráfokat).

Az előzőekben összefoglaltuk, hogy miként ellenőrizhető egy tartó minimális generikus merevsége. Egy szerkezettervező mérnök számára azonban talán ennél is fontosabb, hogy ismerje azokat a műveleteket, amelyekkel ilyen tulajdonságú tartók konstruálhatók, más szóval: amelyek megőrzik a minimális generikus merevséget. Ezek közül hármat már említettünk: a H1 és H2 műveletet, és a rúdpótlást. Az 1.9 ábrán továbbiakat mutatunk:

a) három tárcsamerev rácsos tartó összekapcsolása három csukló mentén *(Csonka 1954)*
b) két rúd kereszteződésébe csukló helyezése *(Csonka 1954, Whiteley 1997)*
c) két tárcsamerev rácsos tartó „összeragasztása" egy rúd mentén *(Whiteley 1997)*
d) csúcshasítás vagy pontszéthúzás *(Whiteley 1997)*:
   d1) egy *z* jelű csomópontot és két ahhoz csatlakozó rudat megduplázunk, a többi, *z*-hez csatlakozó rudat pedig szétosztjuk a *z* csomópont illetve az annak megduplázásával kapott *z*' csomópont között
   d2) egy *z* jelű csomópontot és egy ahhoz csatlakozó rudat megduplázunk, a többi, *z*-hez csatlakozó rudat pedig szétosztjuk a *z* csomópont illetve az annak megduplázásával kapott *z*' csomópont között, és végül beiktatunk egy új rudat *z* és *z*' közé
e) két tárcsamerev rácsos tartót összekapcsolunk egy csomópont és egy rúd segítségével *(Hibbeler 2006)*

f) két tárcsamerev rácsos tartót összekapcsolunk három rúd segítségével *(Hibbeler 2006)*
g) egy tárcsamerev rácsos tartó (melyet elsődleges rácsos tartónak hívunk) egyes rúdjait további tárcsamerev rácsos tartókkal (melyeket másodlagos rácsos tartóknak hívunk) helyettesítjük *(Hibbeler 2006)*



1.9. A minimális generikus merevséget megőrző, rácsostartó-generáló műveletek.

1.2.3. Egyszerű és összetett rácsos tartók

A minimálisan generikusan merev rácsos tartókat a H1 és a H2 művelet (illetve az ezekkel egyenértékű háromszögképzés és rúdpótlás) két, diszjunkt matematikai osztályra bontja. Azokat a tartókat, melyek felépíthetők tisztán H1 lépésekkel (illetve háromszögképzéssel), *egyszerű* vagy *háromszögképzéses* rácsos tartóknak nevezik *(Csonka 1954)* (1.6a-b ábrák). Azokat a tartókat, melyek így nem állíthatók elő, *összetett* rácsos tartóknak hívják *(Csonka 1954)* (1.6c és 1.9g ábra).

Az értekezésben alapvetően ezt az osztályozást fogjuk használni, azonban megemlítjük, hogy léteznek *egyéb osztályozás*ok is. Hibbeler *(2006)* például az alábbi osztályokat különbözteti meg:

i) *egyszerű* („simple”) rácsos tartók (definíciója megegyezik az egyszerű rácsos tartó fenti definíciójával) (lásd az 1.6a-b ábrán előállított tartókat)
ii) *összetett* („compound”) rácsos tartók: olyan tartók, melyek nem építhetők fel pusztán a H1 művelettel, de előállíthatók *egyszerű* rácsos tartókból az 1.9e-g ábrákon ismertetett műveletek segítségével
iii) *komplex* („complex”) rácsos tartók: azok a tartók, melyek az előző két osztály egyikébe sem tartoznak (lásd például az 1.6c ábrán látható tartót)

1.3. ERŐTANI PROBLÉMÁK ÉS A GRÁF-MODELL KAPCSOLATA

Ebben a szakaszban a rácsos tartók gráf-modellje és erőjátéka közötti összefüggésekre mutatunk rá.

A tartó gráf-modelljének felépítése az alapja például a megfelelő rúderő-meghatározó módszer kiválasztásának. Ennek alátámasztására három példát hozunk.

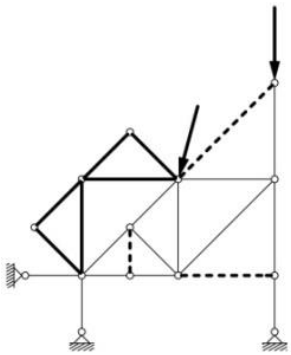
(1) Ha egy rácsos tartóban van fölös rúd (a gráf-modellben fölös él), akkor a rúderők statikai módszerekkel nem számíthatók ki, hanem egyéb módszer (például az erőmódszer) szükséges.

(2) Kizárólag a tiszta háromszögképzéses tartók rúderői határozhatók meg a legegyszerűbb kézi számítási módszerrel, azaz a sorozatos csomópontkimetszés módszerével.

(3) A támasz- és csuklóerők kiszámítását követően minden minimálisan merev rácsos tartó rúderői kiszámíthatók a két legismertebb kézi számítási módszer kombinálásával – a csomóponti és az átmetszéses módszerrel –, kivéve a komplex tartókat (1.6c ábra). Ilyen tartókban egyéb módszer – például a Müller-Breslau-féle *(1887)* rúdpótlásos rúderőszámítási módszer – szükséges. Eme módszer megtalálható például Csonka *(1954*), Korányi *(1953)* vagy Kossalka *(1920)* könyvében. A rúdpótlás érdekessége tehát, hogy egyaránt alkalmas a bonyolult felépítésű, komplex tartók merevségének megállapítására valamint az ilyen tartók rúderőinek számítására. (Megjegyezzük, hogy Csonka és Korányi – tévesen – Hennebergnek tulajdonítja ezt a módszert, mint sok más egyéb irodalmak is.)

A gráf-modell továbbá önmagában alkalmas egyes vakrudak kijelölésére is. Mint ismert, (az elsőrendű elmélet szerint) a vakrudakban nem ébred rúderő topológiai vagy geometriai okokból (1.10 ábra). Azok a vakrudak, melyekben a rúderő hiánya topológiai eredetű, önmagában a gráf-modell alapján kijelölhetők.

Az, hogy egy előfeszítés nélküli, merev rácsos tartó vajon képes-e *sajátfeszültségi állapot*ba *(Tarnai 1990)* kerülni, szintén megállapítható önmagában a gráf-modell alapján. A sajátfeszültség a rácsos tartónak az az állapota, amikor a tartóban anélkül léphetnek fel egyensúlyban lévő, nem-zérus rúderők, hogy a tartót külső erő terhelné. Mint ismert, ilyen állapotba a merev, előfeszítés nélküli rácsos tartók közül kizárólag a redundánsan generikusan merev tartók képesek kerülni, amely tulajdonság megállapítható önmagában a gráf-modell alapján.



1.10. Vakrudak.
A topológiai eredetű vakrudakat vastag folytonos, a geometriai eredetű vakrudakat vastag szaggatott vonal jelzi.

1.4. ERŐTANI ÉS MEREVSÉGI PROBLÉMÁK KAPCSOLATA

A jelen szakaszban arra mutatunk néhány példát, hogy a rácsos tartók merevsége és erőjátéka sok esetben összefügg egymással, majd ismertetjük, hogy mi az alapja ennek a kapcsolatnak. A példák a következők:

(1) Az (előfeszítés nélküli) merev rácsos tartók halmazán belül kizárólag a redundánsan merev rácsos tartókban lehetséges sajátfeszültségi állapot.
(2) A redundánsan merev tartók rúderőinek meghatározásához nem elegendőek a statikai egyenletek, azok megoldása nem egyértelmű.
(3) A rúdpótlás erőtani feltétele szerint „két rúd akkor és csak akkor pótolja egymást a merevség szempontjából, ha az egyik rúd helyén alkalmazott nullértékű (azaz egyensúlyi) erőpár a másik rúdban erőt ébreszt.” *(Korányi 1953)*

A tartók erőjátéka és merevségi tulajdonságai között felfedezhető kapcsolat alapja a szerkezetek *statikai* és *kinematikai egyenlete*i (illetve tulajdonságai) között fennálló duális viszony, melyet részletesen ismertet például a *(Korányi 1953)*, a *(Gáspár és Tarnai 2006)* és a *(Tarnai 1990)*. Eme egyenletek felírása során a szerkezeteket az elsőrendű elmélet szerint vizsgáljuk. Ennek megfelelően kis elmozdulásokat feltételezünk, ami lehetővé teszi, hogy a statikai egyenleteket a szerkezetek eredeti helyzetében írjuk fel, illetve hogy a kinematikai egyenleteket linearizáljuk. A statikai egyenletrendszer a csomópontok egyensúlyát fejezi ki, vagyis azt, hogy az egyes csomópontokra ható külső és belső erők eredője nulla. A kinematikai egyenletrendszer a rudakra vonatkozó kompatibilitást (csatlakozási feltételt) fejezi ki linearizált formában, vagyis azt, hogy az egyes rudak hosszváltozása (belső elmozdulások) megegyezik adott rúdvégi csuklók (külső) elmozdulása után a rúdvégi csuklók közötti távolság megváltozott hosszának illetve eredeti hosszának különbségével. A statikai egyenletrendszer együttható mátrixa $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ *egyensúlyi mátrix*, míg a kinematikai egyenletrendszer együttható mátrixa a **G** *összeférhetőségi* (latin eredetű szóval *kompatibilitási*) *mátrix (Tarnai 1990)*.

Korábban (1.2.1 szakasz) a merevséget kinematikai szempontból definiáltuk: *merev*nek neveztünk egy (előfeszítés nélküli) tartót, ha – a merevtestszerű mozgásoktól eltekintve – nincsenek infinitezimális vagy véges szabad elmozdulásai, vagyis a szerkezet kinematikailag

nem határozatlan *(Tarnai 1990)*. Egy rácsos szerkezetet *kinematikailag határozatlan*nak nevezünk, ha található olyan belső (relatív) elmozdulás, hogy a belőle ébredő külső elmozdulásokat csupán a kinematikai egyenletek segítségével ugyan meg lehet határozni, de nem egyértelműen *(Tarnai 1990)*.

Tekintve, hogy a kinematikai határozatlanság és a statikai túlhatározottság fogalmak ekvivalensek *(Tarnai 1990)*, a merevség statikai szempontból is meghatározható: *merev*nek nevezünk egy (előfeszítés nélküli) tartót, ha az egyensúly tetszőleges egyensúlyi külső erőrendszer esetén biztosítható, más szóval az egyensúlyi egyenleteknek létezik megoldása, vagyis a szerkezet statikailag nem túlhatározott. Egy rácsos szerkezetet *statikailag túlhatározott*nak nevezünk, ha található olyan külső egyensúlyi erőrendszer, amelyre az egyensúlyi egyenletrendszer önmagában ellentmondásra vezet. A merevségnek ez utóbbi definícióját a matematikusok körében szokás *statikai merevség*nek nevezni *(Connelly 1987)*.

Érdemes megfigyelni, hogy a merevség definíciójának kinematikai megközelítése azt fejezi ki, hogy egy merev szerkezet *nyugalom*ban van, míg a statikai megközelítés azt mutatja be, hogy a szerkezet *egyensúly*ban van tetszőleges egyensúlyi külső erőrendszer esetén. A két fogalom közötti ekvivalencia nem meglepő, hiszen Newton II. törvénye értelmében ($F=ma$) zérus gyorsuláshoz zérus nagyságú erő tartozik, vagyis a nyugalmi állapothoz egyensúly tartozik *(Gáspár és Tarnai 2006)*. A kinematikai és a statikai tulajdonságok közötti duális viszonynak azonban nem csak fizikai, hanem matematikai oka is van. Ugyanis a *rúdszerkezet* statikai és kinematikai egyenletrendszerét magában foglaló, alább közölt ún. *alapegyenleté*ben *(Szabó és Roller 1971)* a **G** és a $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ mátrixok egymás transzponáltjai:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

ahol **F** a szerkezet hajlékonysági mátrixa (amely a merevségi mátrix inverze), **u** a külső csomóponti elmozdulások vektora, **s** a belső rúderők vektora, **q** a külső erők vektora, **t** a kinematikai terhek (előírt belső relatív elmozdulások, például süllyedés) vektora.

A merevség fent említett statikai illetve kinematikai megközelítését a mérnökök használják. Megemlítjük, hogy a matematikában is létezik egy ezzel egyenértékű fogalom: az ún. *infinitezimális merevség (Connelly 1987; Jordán és szerzőtársai 2004; Graver és szerzőtársai 1993)*, ez utóbbi fogalmat azonban csupán megtámasztás nélküli szerkezetekre értelmezik.

1.5. RÉSZLETES KUTATÁSI CÉLOK ÉS EREDMÉNYEK

A **2. fejezet**ben azt vizsgáljuk, hogy egy csomópontjain terhelt tartóban egy terheletlen csomópont helyzetének módosítása (megzavarása) a tartó mely rúdjaiban idézi elő a rúderők megváltozását, és hogy a rácsos tartók mennyire érzékenyek az ilyen típusú zavarásokra. Ezen utóbbi rudak halmazát (a kapcsolódó csomópontokkal együtt) az adott csomópont *befolyásolt zónájá*nak neveztük. Ha egy rácsos tartóban átlagoljuk a befolyásolt zónák rúdszámát és ezt osztjuk a tartó rúdszámával, akkor a tartó *geometriai érzékenységi indexét* – röviden érzé-

kenységét – kapjuk. Ez a 0 és 1 közötti mérőszám megmutatja, hogy egy szerkezet átlagosan mennyire érzékeny kis csomóponti hibákra, tökéletlenségekre.

Céljaink:

- Olyan módszert mutatni, mellyel a befolyásolt zóna kijelölhető rúderőszámítás és metrikus adatok megadása nélkül, pusztán a csomópontok szomszédsági viszonyait leíró gráf – azaz a *gráf-modell* – alapján.
- Minimális, illetve maximális érzékenységű rácsos tartókat mutatni.
- Felkutatni, hogy milyen tényezők növelik, illetve csökkentik az érzékenységet.

A fentiekkel kapcsolatos eredményeket – melyeket részletesen az **1. tézis** és a **2. tézis** ismertet – az alábbiakban röviden összefoglaljuk.

Mind a minimálisan merev tartók, mind a redundánsan merev tartók esetére kombinatorikus módszert mutatunk arra, hogy miként jelölhető ki a befolyásolt zóna erőtani számítások nélkül, önmagában a tartó gráf-modellje alapján. Eme feladat megoldása során kombinatorikus algoritmust adunk arra is, hogy miként jelölhető ki pusztán a tartó gráf-modellje alapján egyrészt az adott csomóponthalmazon működő külső teher hatására aktív rudak (azaz a nemvakrudak) halmaza, másrészt egy adott redundánsan merev tartó sajátfeszültségi állapotában aktív rudak halmaza. Továbbá a rúdpótlás végrehajtásának egy új, kombinatorikai – szükséges és egyben elégséges – feltételét adjuk meg.

A geometriai érzékenység index fogalma alapján példákat mutatunk minimális illetve maximális érzékenységű minimálisan merev rácsostartó-típusokra, továbbá mutatunk két olyan tényezőt, melyekkel az érzékenység növelhető illetve csökkenthető: egyrészt a fölös rudak számával (azaz a statikai határozatlanság fokával), másrészt – a mérnöki szakmában gyakori – speciális geometriai és teherelrendezéssel.

Az érzékenységet rácsos tartókból képzett sorozatokon is tanulmányozzuk. Ez utóbbiak vizsgálatára bevezetjük a (diszkrét) *rácsostartó-család*ok fogalmát, melyeket egy kiinduló rácsos tartóból rekurzív bővítési lépések sorozatával képzünk. Mint ismeretes, minden statikailag határozott rácsos tartó előállítható Henneberg 1-es (H1) és Henneberg 2-es műveletek kombinációjával. Ennek alapján tisztán H1-es lépésekkel képzett, illetve vegyes képzésű családokat vizsgálunk. Bemutatjuk, hogy amennyiben a rekurzív bővítés csak Henneberg 1-es típusú elemekből áll, és a bővítés üteme a lépésszám polinomiális függvénye, valamint (a kezdeti családtag csomópontjait kivéve) minden csomópont legfeljebb a csomópont keletkezését követő lépésben eléri végleges fokszámát, akkor az érzékenység határértéke (ahogy a lépésszám a végtelenhez tart) legfeljebb 0.5.

A **3. fejezet**ben arra keressük a választ, hogy vajon javítható-e a rácsos tartók viselkedése kis geometriai zavarással.

Ennek során azonos anyagú és keresztmetszetű rudakból álló, síkbeli, tükörszimmetrikus, statikailag határozott rácsos tartók egyetlen p geometriai paraméterrel leírható folytonos családjait vizsgáljuk, és egyetlen x szimmetriasértő változót alkalmazunk. Az x változót úgy választjuk meg, hogy az x=0 eset a szimmetrikus elrendezéshez tartozzon, és hogy x-et a -1-szeresére változtatva az eredeti tartó tükörképét kapjuk. Optimáló célfüggvényünk a kihajlásra

legveszélyesebb rúd kihajlással szembeni kockázatát írja le x és p függvényében. Az optimális geometriai alakok eme célfüggvény minimumához tartoznak.

Korábbi kutatások *(Várkonyi és Domokos 2006)* azt vetítik előre, hogy amennyiben csupán egyetlen szimmetriasértő változót veszünk figyelembe, akkor tipikus esetekben a szimmetrikus elrendezés optimális, és egyben kissé aszimmetrikus optimális tartók nem léteznek, ami alátámasztja a mérnökök ama intuícióját, miszerint a szimmetrikus tartók kedvezőbbek kissé aszimmetrikus hasonmásuknál.

Célunk:

- Megvizsgálni, hogy léteznek-e mégis kissé aszimmetrikus rácsos tartók.

Az erre a kérdésre adott választ – melyet részletesen a **3. tézis** ismertet – az alábbiakban röviden összefoglaljuk.

Példát mutatunk olyan rácsos tartókra, amelyek – miközben mérnöki szempontból szokványosak – Várkonyi és Domokos (2006) eredményeitől eltérő, atipikus viselkedést mutatnak: a geometriai paraméter bizonyos tartományában a kissé aszimmetrikus elrendezések egy folytonos tartománya egyenértékű a szimmetrikus verzióval. Rámutatunk olyan tényezőkre, amelyek növelik eme neutrális viselkedés esélyét.

A **4. fejezet**ben a vakrudakkal foglalkozunk, melyekben, mint ismert, a lineáris (elsőrendű) elmélet szerint nem ébred rúderő az adott teher hatására. Nemlineáris elmélettel azonban már a bennük lévő (igen kicsiny) rúderők is kimutathatók.

Célunk:

- Megvizsgálni, hogy milyen tartószerkezeti következtetések vonhatók le a vakrudak erőjátékának nemlineáris vizsgálata alapján.

Az ezzel kapcsolatos eredményeket – melyek részletesen a **4. tézisben** szerepelnek – az alábbiakban röviden összefoglaljuk.

Rámutatunk, hogy a tipikus vakrudak előjele független a teher előjelétől, melyet egy egyszerű síkbeli rácsos tartó numerikus számításával illusztrálunk. Bemutatjuk, hogy ilyen vakrudakban a rúderő előjele bizonyos esetekben kimutatható nemlineáris számítás nélkül, elemi statikai vizsgálatok segítségével is. Bemutatjuk, hogy a vakrudak osztályozhatók az alapján, hogy a bennük fellépő rúderő a teherparaméter mely hatványával arányos. Példát mutatunk olyan szerkezetcsaládra, mellyel tetszőleges korlátnál magasabb rendben elfajuló vakrudak képezhetők.

2

SÍKBELI RÁCSOS TARTÓK GEOMETRIAI ÉRZÉKENYSÉGE

Ebben a fejezetben olyan kérdéseket tanulmányozunk, melyek a rácsos tartók erőjátéka és gráf-modellje közötti összefüggésekre mutatnak rá.

2.1. A FELADAT PONTOS MEGHATÁROZÁSA

2.1.1. Geometriai tökéletlenség, befolyásolt zóna, geometriai érzékenység

Ha egy csomópontjain terhelt, vakrudak nélküli tartóban egy terheletlen v_1 jelű csomópont helyzete a tervezettől eltér, vagy azt szándékosan módosítjuk, akkor bizonyos rudakban a rúderő eltér a tervezett, eredeti geometria alapján számolt rúderőtől. A megzavart, terheletlen csomópontot *tökéletlen csomópont*nak, a zavarás mértékét *geometriai tökéletlenség*nek, az említett rúdhalmazt (valamint a kapcsolódó csomópontokat) a v_1 jelű *csomópont befolyásolt zónájá*nak hívjuk, és $B(v_1)$-gyel jelöljük. Lásd a 4. oldalon az 1.2c ábrát, melyen a pirossal jelölt csomópont befolyásolt zónáját emeltük ki.

Első célunk olyan módszert mutatni, mellyel a befolyásolt zóna kijelölhető rúderőszámítás és metrikus adatok megadása nélkül, önmagában a tartó gráf-modelljének ismeretében, kombinatorikus eszközökkel. Ezzel a feladattal foglalkozik a 2.2 alfejezet.

Fontos hangsúlyoznunk, hogy kizárólag a csomópont helyzetének megváltozásából eredő rúderő-változásokat vizsgáljuk, a külső erők helyének megváltozásából adódó hatásokat nem. Ennek érdekében a tökéletlen csomópontot mindig egy belső (azaz fix környezettel nem érintkező), terheletlen csomópontnak tekintjük.

Továbbá vizsgálatainkban azt is előírjuk, hogy minden lehetséges rudat teher alá kell helyezni (azaz a tartóban ne legyenek vakrudak). Ellenkező esetben ugyanis a kizárólag vakrudakkal csatlakozó csomópontok befolyásolt zónája a zérus halmaz lenne, és a feladat értelmét vesztené. Értelemszerűen azonban a két rudat egymásba kapcsoló csomópontok befolyásolt zónájának vizsgálatakor ez utóbbi elkerülhetetlen.

Ha egy rácsos tartóban átlagoljuk a befolyásolt zónák rúdszámát és ezt osztjuk a tartó rúdszámával, akkor a tartó *s geometriai érzékenységi index*ét (röviden *érzékenysé*gét) kapjuk:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{c} r(B(\mathrm{v}_i))}{c * r} \tag{2.1}$$

ahol c a tartó belső csomópontjainak száma, r a tartó rúdszáma, $r(B(\mathrm{v}_i))$ a $B(\mathrm{v}_i)$ befolyásolt zóna rúdszáma.

Ez a 0 és 1 közötti mérőszám megmutatja, hogy egy szerkezet átlagosan mennyire érzékeny kis csomóponti hibákra, tökéletlenségekre – például a 2.1 ábra bal oldalán látható tartó érzékenysége 0,4815.

Második célunk megvizsgálni, hogy milyen módszerekkel növelhető illetve csökkenthető az érzékenység, valamint minimális és maximális érzékenységű tartókat mutatni. Ezt a feladatot a 2.3 szakaszban tárgyaljuk.

A kitűzött célok megvalósítása előtt tisztázzuk alapfeltevéseinket és néhány alapfogalmat.

2.1.2. Alapfeltevések és néhány alapfogalom

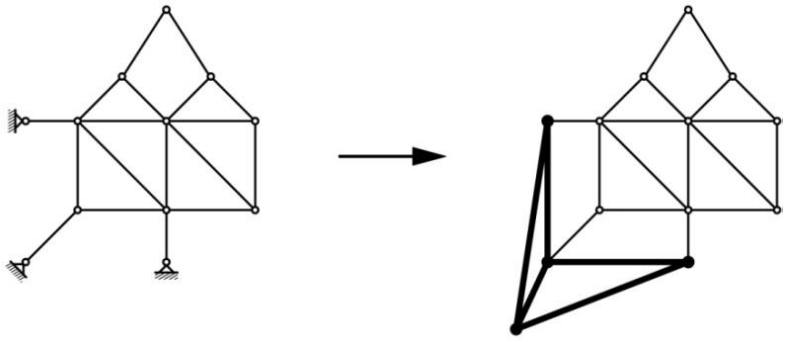
Vizsgálatainkban lineárisan rugalmas, állandó és azonos keresztmetszetű, azonos anyagminőségű rudakból valamint súrlódásmentes csuklókból álló, kiindulási (azaz külső teher nélküli) állapotban feszültségmentes, síkbeli rácsos tartókat tanulmányozunk. Feltételezzük, hogy a rácsos tartók végeikkel csuklósan kapcsolódó egyenes tengelyű, húzásra és nyomásra is terhelhető rudakból álló, merev alakzatú szerkezetek, melyeken a külső erők (terhek és a támaszerők) a csomópontokon, a tartó síkjában működnek. A rácsos tartók önsúlyát elhanyagolhatónak tekintjük. A szerkezetek elsőrendű elméletét alkalmazzuk, vagyis az egyensúlyt a tartó terhelés előtti, deformálatlan helyzetében kell kimutatnunk. Stabilitási és szilárdsági kérdésekkel nem foglalkozunk.

A megtámasztott rácsos tartók modellezése során a megtámasztási kényszereket csuklós rudakkal modellezzük.

Annak érdekében, hogy a megtámasztott és a támasz nélküli eseteket egységesen kezelhessük, két intézkedést teszünk. Egyrészt a statikai határozottság illetve határozatlanság fogalma helyett a minimális, illetve redundáns merevség fogalmát használjuk, amely fogalmakat a Bevezetés 1.2.1 szakaszában már ismertettük. Másrészt, a megtámasztott tartókat visszavezetjük támasz nélküli tartókra azáltal, hogy a megtámasztó környezetet is egy minimálisan merev rácsos tartóval modellezzük. Ennek egy lehetséges módja, hogy a megtámasztott tartó külső csomópontjaiból folytonos, nyitott rúdláncot készítünk, majd annak minden csomópontját összekötjük egy új, fiktív csomóponttal (2.1 ábra).

Vizsgálatainkat alapvetően *tipikus rácsostartó-feladatok*on végezzük el, azonban a fejezet végén, a 2.3.4 szakaszban említést teszünk az *atipikus* esetekről is. Egy rácsostartó-feladat bemenő adatait a tartó statikai modellje és anyagtulajdonságai alkotják, kimenő adatait pedig a tartó rúderői. Egy diszkréten változó tulajdonság – például a merevség vagy a befolyásolt

zóna mérete (melyet a zóna rúdszámával mérünk) – szempontjából tipikusnak nevezünk egy rácsostartó-feladatot, ha a metrikus bemenő adatokban (ilyen például egy csomóponti koordináta) bekövetkező elegendően kis változás az adott tulajdonság szempontjából nem idéz elő változást. Például az 1.3b ábrán látható szerkezetek a merevség szempontjából atipikusak, míg az 1.3c ábrán láthatóak tipikusak. Vegyük észre, hogy ha egy tartóban véletlenszerűen (illetve „kellően általános”-an) vesszük fel metrikus adatokat (például a csomóponti koordinátákat), 1 valószínűséggel tipikus feladatot kapunk.



2.1. ábra. Megtámasztott rácsos tartó visszavezetése megtámasztás nélküli tartóra.
A tartó megtámasztó környezetét egy minimálisan merev rácsos tartóval modellezzük.

2.2. A BEFOLYÁSOLT ZÓNA KOMBINATORIKUS KIJELÖLÉSE

A jelen alfejezetben tárgyalt, elért eredményeket a *(Tóth, Domokos és Gáspár 2009; Tóth 2011; Tóth 2012; Jordán, Domokos és Tóth 2013)* munkákban publikáltuk.

2.2.1. A módszer gondolatmenete és kulcsfogalmai: aktív zóna, merev mag

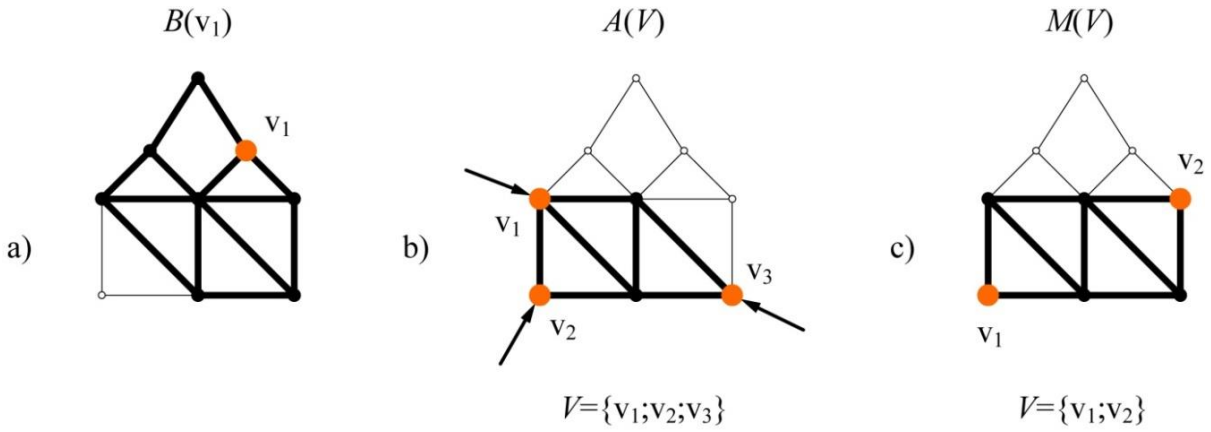
A befolyásolt zóna kombinatorikus kijelölése céljából egy kapcsolatrendszert mutatunk ki a befolyásolt zóna és két új fogalom – az *aktív zóna* és a *merev mag* – között. Az új fogalmak definíciója a következő:

Tekintsünk egy tetszőleges, legalább kételemű V csomóponthalmazon működő tetszőleges egyensúlyi külső erőrendszerrel terhelt merev rácsos tartót. A tartónak azt a rúdhalmazát (valamint a hozzá kapcsolódó csomópontokat), amelyben az említett erőrendszer elsőrendben rúderőket indukál, a *V csomóponthalmaz aktív zónájá*nak hívjuk; jele: $A(V)$ (lásd például a 2.2b ábrát).

Minimálisan merev rácsos tartó *V csomóponthalmazának merev mag*ja a tartónak az a legkisebb (azaz legkevesebb rudat tartalmazó), összefüggő, minimálisan merev része, ami V-t tartalmazza; jele: $M(V)$, lásd például az 2.2c ábrát. Redundánsan merev tartók esetén a merev magot a tartó egy tetszőleges törzstartóján értelmezzük. Bizonyítható, hogy a merev mag minden esetben létezik és egyértelmű (lásd a 2. Segédtételt a 4. számú Mellékletben).

Figyeljük meg, hogy míg a befolyásolt zóna és az aktív zóna utal a rúderőkre, addig a merev mag definíciójában ezek a fogalmak nem szerepelnek. Továbbá az is könnyen belátható,

hogy a merev tartókban a merev mag már a merevség topológiai feltételei alapján meghatározható, amely feltételek a gráf-modell ismeretében ellenőrizhetők (lásd az 1.2 szakaszt).



2.2. ábra. Csomópont befolyásolt zónája (a), csomóponthalmaz aktív zónája (b) és csomóponthalmaz merev magja (c).

2.2.2. Befolyásolt zóna – aktív zóna

A jelen szakaszban a befolyásolt zóna és az aktív zóna közötti kapcsolatot mutatjuk ki.

Vizsgáljuk először a pontosan két rudat egybekapcsoló – más néven a *másodfokú* – csomópontok befolyásolt zónáját. Tekintve, hogy definíció szerint a tökéletlen csomópont terheletlen (vagy le kell róla venni a terhet), ezért a csomóponthoz csatlakozó rudak vakrudak lesznek az adott csomópont geometriai tökéletlensége előtt és után egyaránt. Következésképpen az ilyen csomópontok befolyásolt zónája a zérus halmaz. Egy rácsos tartó csomópontjainak többsége azonban rendszerint legalább *harmadfokú*. Ilyen esetekben:

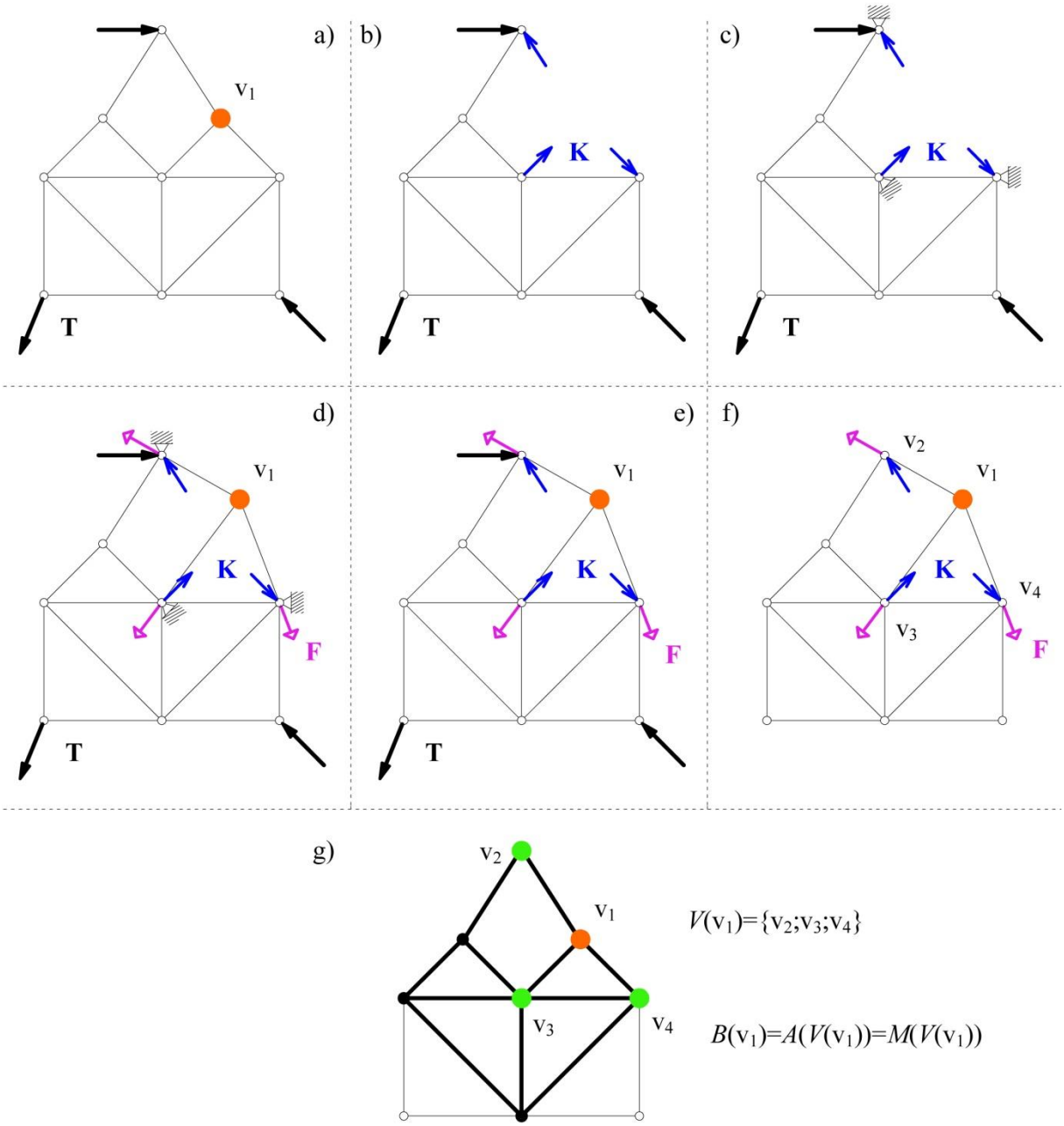
1. Tétel:

Merev rácsos tartó egy legalább harmadfokú v_i jelű csomópontjának befolyásolt zónája azonos az ugyanazon csomóponttal szomszédos csomópontok halmazának aktív zónájával, azaz: $B(v_i)=A(V(v_i))$ (lásd például a 2.3e ábrán kiemelt tartórészt). (Itt $V(v_i)$ jelöli a v_i jelű csomóponttal szomszédos csomóponthalmazt.)

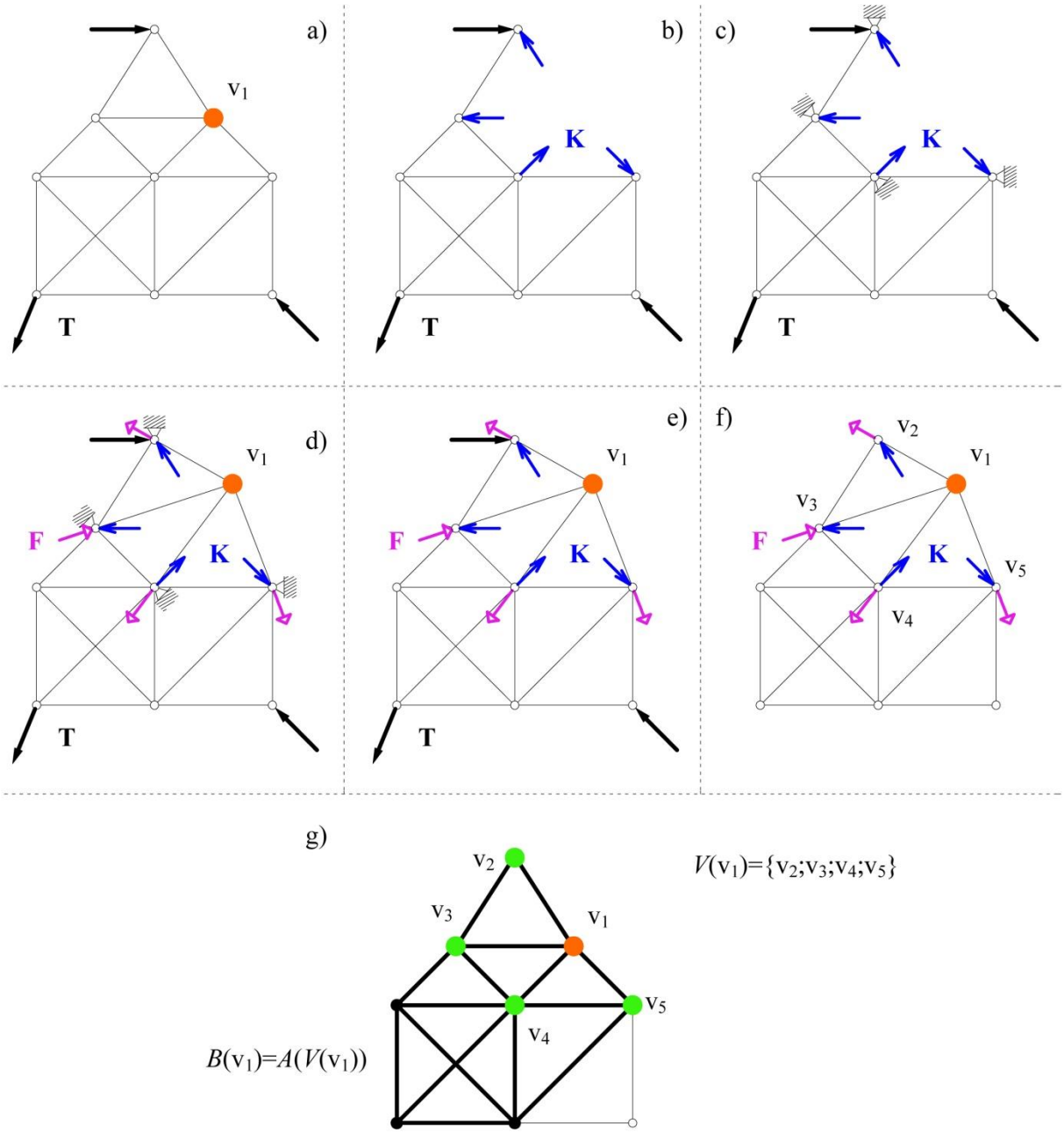
Bizonyítás:

A továbbiakban a v_1 csomópontból és hozzá kapcsolódó rudakból képzett halmazt *csillag*nak nevezzük, valamint a tartó eredeti (a geometriai tökéletlenség előtti, tehermentes) geometriáját G geometriának, a tartó megzavart (a geometriai tökéletlenség utáni, tehermentes) geometriáját G' geometriának hívjuk.

A tételt egyszerre bizonyítjuk a minimálisan merev és a redundánsan merev esetre. Tekintsünk egy tetszőleges **T** egyensúlyi külső erőrendszerrel terhelt minimálisan merev (2.3a ábra) illetve redundánsan merev (2.4a ábra) tartót, és vizsgáljuk egy tetszőleges, v_1 jelű, terheletlen belső csomópont geometriai tökéletlenségét.



2.3. ábra. A befolyásolt zóna, az aktív zóna és a merev mag kapcsolata minimálisan merev tartóban.
A **T** egyensúlyi külső erőrendszerrel terhelt, minimálisan merev tartó (a). Eltávolítjuk a v_1 csomópont csillagját, amelyet a **K** kiegészítő teherrel helyettesítünk (b). Rögzítjük a tartót ebben az alakjában a **K**-val terhelt csomópontokba elhelyezett támaszokkal (c). Visszahelyezzük a csillagot, de ezúttal már a megzavart, G' geometriához tartozó hosszúságú rudakkal (d): ekkor a csillag befeszül a támaszok közé, a támaszokban az **F** egyensúlyi erőrendszert előidézve. A támaszokat eltávolítjuk, és azokat az **F** erőrendszerrel helyettesítjük (e). A tartóról levesszük az eredeti terhet, így csak a **K** és az **F** erőrendszer marad a tartón (f).
A g) ábrán a $B(v_1)$ befolyásolt zónát emeltük ki, mely az 1. Tétel értelmében azonos az $A(V(v_1))$ aktív zónával. A 2. Tétel értelmében az $A(V(v_1))$ aktív zóna az $M(V(v_1))$ merev maggal esik egybe (g).



2.4. ábra. A befolyásolt zóna és az aktív zóna kapcsolata redundánsan merev tartóban.

A **T** egyensúlyi külső erőrendszerrel terhelt, redundánsan merev tartó (a). Eltávolítjuk a v_1 csomópont csillagját, amelyet a **K** kiegészítő teherrel helyettesítünk (b). Rögzítjük a tartót ebben az alakjában a **K**-val terhelt csomópontokba elhelyezett támaszokkal (c). Visszahelyezzük a csillagot, de ezúttal már a megzavart, G' geometriához tartozó hosszúságú rudakkal (d): ekkor a csillag befeszül a támaszok közé, a támaszokban az **F** egyensúlyi erőrendszert előidézve. A támaszokat eltávolítjuk, és azokat az **F** erőrendszerrel helyettesítjük (e). A tartóról levesszük az eredeti terhet, így csak a **K** és az **F** erőrendszer marad a tartón (f).

A g) ábrán a $B(v_1)$ befolyásolt zónát emeltük ki, mely az 1. Tétel értelmében azonos az $A(V(v_1))$ aktív zónával.

Távolítsuk el a terhelt (és a terhelés hatására deformálódott) tartóból a csillagot, és annak érdekében, hogy a megmaradt tartórész továbbra is egyensúlyban legyen, és abban a rúderők változatlanok maradjanak, működtessük **K** *kiegészítő teher*ként az eredetileg a csillagról a $V(v_1)$ csomóponthalmazra átadódó rúderőket, melyek így egy külső egyensúlyi terhet alkotnak a csillaggal szomszédos csomóponthalmazon (2.3b illetve 2.4b ábra). Ezt követően fixáljuk a tartót eme deformált alakjában a **K**-val terhelt csomópontokba helyezett támaszokkal (2.3c illetve 2.4c ábra): ekkor a rúderők továbbra is változatlanok maradnak és az új támaszokban még nem ébred támaszerő. Következő lépésként iktassuk be újra a csillagot, de ezúttal már a G' jelű, megzavart geometria szerinti rúdhosszakkal (2.3d illetve 2.4d ábra). Tekintettel arra, hogy a csillag az 1. Tétel kikötései alapján legalább 3 rudat tartalmaz, valamint mert a tartó eredeti állapota deformálódott a teher hatására, ezért a csillag be fog feszülni a beiktatott támaszok közé, melynek hatására a támaszokban egy **F** egyensúlyi támaszerőrendszer fog ébredni, de a csillagon kívüli tartórészben továbbra is változatlanok maradnak a rúderők. Most távolítsuk el a fix támaszokat, de a hatásukat helyettesítsük az **F** egyensúlyi rendszerrel (2.3e illetve 2.4e ábra). Ezután vegyük le eme megzavart geometriájú tartóról az eredeti **T** (egyensúlyi) terhet, így csak a **K** és az **F** egyensúlyi erőrendszerek maradnak meg (2.3f illetve 2.4f ábra). A tartó továbbra is egyensúlyban van, hiszen merev. A szuperpozíció elve szerint a tartó csillaghoz nem tartozó rúdjaiban az így kapott rúderők éppen azt a rúderőváltozást (pontosabban annak (–1)-szeresét) mutatják, amelyet az eredeti **T** teher esetén a vizsgált v_1 csomópont helyzetének megváltozása (megzavarása) okoz az eredeti helyzethez képest.

Most azt is vizsgáljuk meg, hogy mi történik a csillag rúdjaiban! A v_1 csomópont helyzetének tipikus megzavarása esetén a csillag rúdjaiban a rúderők mind megváltoznak, tehát a csillag tipikusan része a v_1 csomópont befolyásolt zónájának. Kérdés azonban, hogy vajon a csillag rúdjaiban ébrednek-e rúderők a **K** és **F** (egyensúlyi) terhek hatására. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz, hogy a **K** és **F** terhet a tartó egy merev, *E* jelű része úgy képes kiegyensúlyozni, hogy közben a csillag minden/néhány rúdja vakrúd! Ez az *E* merev tartórész a kiegészítő teher hatására deformálódik, és ezért az erre „épülő" csillagban lévő rudak közül legalább három befeszül, mivel a legalább 3 rudat tartalmazó csillag egy statikailag határozatlan „felépítmény" az *E* merev tartórészen. Tegyük fel, hogy a csillagban a 3 befeszülő rúdon kívüli léteznek olyan rudak is, melyek nem feszülnek be az *E* tartórész deformálódása hatására, azaz vakrudak. Tekintve azonban, hogy a csillag legalább 3 rúdja befeszült, ezért a v_1 csomópont is elmozdul, ami a csillag vakrúdjaiban is befeszülést okoz, hiszen a vakrudak a deformálódott *E* tartórész és az elmozdult v_1 csomópont közé „ékelődnek be". Következésképpen tehát tipikusan a teljes csillagban ébrednek zérustól eltérő rúderők a **K** és **F** terhek hatására, ami ellent mond a kiinduló feltételezésünknek. Azt kaptuk tehát, hogy a teljes csillagban ébrednek rúderők a **K** és **F** terhek hatására.

A fentiekből következik, hogy adott csomópont befolyásolt zónája azonos az ugyanazon csomóponttal szomszédos csomóponthalmaz aktív zónájával (melyet a 2.3e illetve 2.4e ábrán vastag vonalak és teli körök jeleznek), azaz bizonyítottuk az 1. Tételt.

2.2.3. Aktív zóna – merev mag (minimálisan merev tartók)

A jelen szakaszban a minimálisan merev tartók esetén mutatjuk ki az aktív zóna és a merev mag kapcsolatát.

2. Tétel:

Minimálisan merev rácsos tartó tetszőleges V csomóponthalmazán működő, tetszőleges, egyensúlyi külső erőrendszer aktív zónája azonos az ugyanazon csomóponthalmaz merev magjával, azaz: $A(V)=M(V)$. (Például a 2.3e ábrán kiemelt $A(V(v_1))$ aktív zóna egyben az $M(V(v_1))$ merev mag).

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $A(V)\neq M(V)$. Minimálisan merev tartóban $A(V)$-nek minimálisan merevnek kell lennie, ellenkező esetben nem lehet megteremteni az egyensúlyt tetszőleges egyensúlyi külső erőrendszer működése esetén. V része $A(V)$-nek, hiszen a terhelt csomópontok mindegyikébe fut be zérustól eltérő rúderőt tartalmazó rúd. $A(V)$ tehát minimálisan merev, és V-t tartalmazza, csakúgy, mint $M(V)$, így $A(V)$ és $M(V)$ egymást legalább a minimum kételemű V csomóponthalmazban metszik. Bizonyítható, hogy ha egy minimálisan merev tartóban két, minimálisan merev tartórész legalább két csomópontban metszi egymást, akkor a metszetük is minimálisan merev (lásd az 1. és a 2. Segédtételt a 4. számú Mellékletben). Minthogy ez utóbbi feltétel teljesül $A(V)$-re és $M(V)$-re, a metszetük minimálisan merev. Ekkor három eset lehetséges:

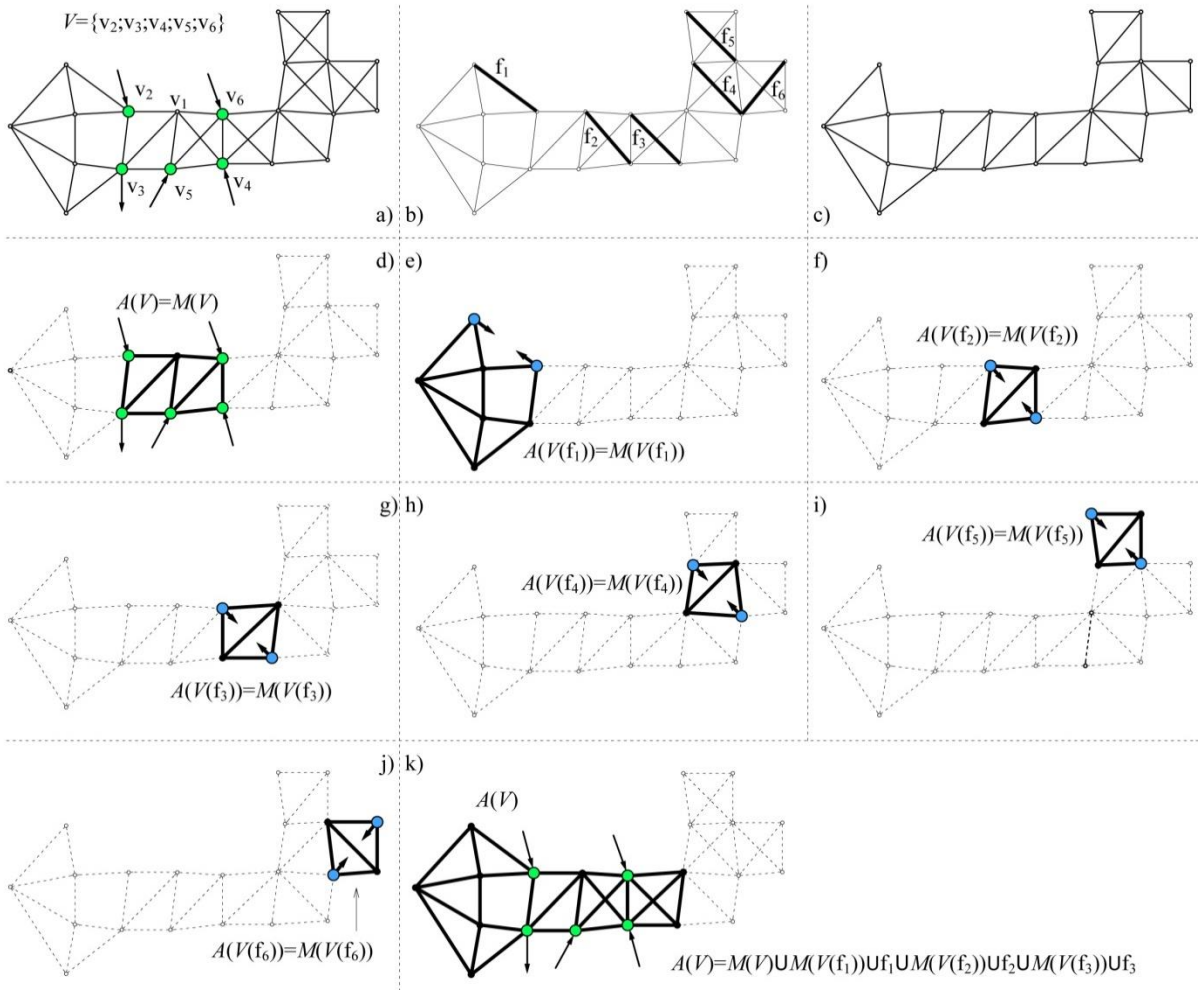
1) $A(V)\cap M(V)$ sem $A(V)$-vel, sem $M(V)$-vel nem azonos: ez esetben a kiinduló feltételezésünkkel ellentétben $M(V)$ nem volt merev mag, hiszen kevesebb rúddal is ki lehetett egészíteni a V-t úgy, hogy minimálisan merev tartórészt kapjunk.
2) $A(V)$ valódi részhalmaza $M(V)$-nek: ekkor szintén arra jutunk, hogy a kiinduló feltételezésünkkel ellentétben $M(V)$ nem volt merev mag, hiszen kevesebb rúddal is ki lehetett egészíteni a V-t úgy, hogy minimálisan merev tartórészt kapjunk.
3) $M(V)$ valódi részhalmaza $A(V)$-nek: ez esetben a V halmazon működő egyensúlyi külső erőrendszert két különböző belsőerőrendszer is ki tudja egyensúlyozni: az $M(V)$ rúdhalmazában működő erőrendszer, és az $A(V)$ rúdhalmazában működő erőrendszer is, ami minimálisan merev tartókban lehetetlen, hiszen csak egyetlen megoldás létezik.

Mivel mindhárom fenti eset ellentmondásra vezetett, azt kaptuk, hogy a kiinduló feltételezésünk helytelen volt, vagyis $A(V)$ megegyezik $M(V)$-vel. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

2.2.4. Aktív zóna – merev mag (redundánsan merev tartók)

A jelen szakaszban a redundánsan merev esetben vizsgáljuk meg az aktív zóna és a merev mag kapcsolatát. Az erőmódszerre *(Kurutzné Kovács 2003)* támaszkodva fogjuk bemutatni, hogy a redundánsan merev tartók aktív zónája visszavezethető a minimálisan merev törzstartó alkalmas aktív zónáira és ezáltal merev magjaira. Ezt először egy példán mutatjuk be, majd abból indukcióval következtetünk az általános esetre.

Tekintsük a 2.5a ábrán látható, h=6-szorosan határozatlan tartót, és keressük meg benne az $A(V)$ aktív zónát!



2.5. ábra. Az aktív zóna és a merev mag kapcsolata redundánsan merev tartóban.
Az a) ábrán látható tartót a V csomóponthalmazon terheljük, majd a b) ábrán kiemelt fölös rudak eltávolításával létrehozzuk a tartó egy tetszőleges törzstartóját (c). A d) ábrán az eredeti teher által terhelt V csomóponthalmaz törzstartón értelmezett $A(V)$ aktív zónáját emeltük ki. Az e)-j) ábrákon az egységerőkkel terhelt csomópontpárok törzstartón értelmezett aktív zónáit emeltük ki. Az eredeti tartón értelmezett $A(V)$ aktív zóna (k).

A feladat megoldása során az alábbi jelölésrendszert használjuk:

f_i	a törzstartóképzés során az eredeti tartóból eltávolított i-edik fölös rúd (i=1,2,…,h)
$V(f_i)$	az f_i fölös rúddal szomszédos csomópontpár
N_0 ábra	a törzstartón az eredeti teher által előidézett rúderőábra
N_i ábra és N_j ábra	a törzstartón az i-edik (illetve j-edik) egységteher által előidézett rúderőábra (j=1,2,…,h)

$N_{\text{végleges}}$ ábra	az eredeti tartón az eredeti teher által előidézett rúderőábra
l , E és A	rúdhossz, rugalmassági modulus és a rúd keresztmetszet-területe
X_i	az i-edik fölös rúdban ébredő ismeretlen rúderő
e_{i0}	terhelési tényező (a képletét lásd a (2.2)-nél)
e_{ij}	egységtényező (a képletét lásd a (2.2)-nél)

ahol:

$$e_{i0} = \frac{\sum N_i N_0 l}{EA}, \quad e_{ij} = \frac{\sum N_i N_j l}{EA} \tag{2.2}$$

Készítsük el a tartó 2.5c ábrán látható törzstartóját, melyet a 2.5b ábrán megjelölt f_1, f_2, …, f_6 fölös rudak eltávolításával nyerünk. Az erőmódszer szerint a végleges rúderőket tartalmazó rúderőábrát a következőképpen kapjuk:

$$N_{\text{végleges}} = N_0 + X_1 * N_1 + X_2 * N_2 + X_3 * N_3 + X_4 * N_4 + X_5 * N_5 + X_6 * N_6 \tag{2.3}$$

Az adott teher hatására tehát azokban a rudakban lesz (tipikusan) rúderő, amelyekben rúderő lép fel az N_0 ábra vagy az (ismeretlenekkel szorzott) X_1*N_1, X_2*N_2,…, X_6*N_6 ábrák közül legalább egyben.

Először vizsgáljuk meg, hogy az egyes N_0, N_1, …, N_6 ábrákban mely rudakban lépnek fel rúderők. Az aktív zóna definíciója alapján a N_0 ábrában azokban a rudakban lépnek fel rúderők, amelyek a törzstartón értelmezett $A(V)$ aktív zónába tartoznak (2.5d ábra). Ez utóbbi rúdhalmaz a 2. Tétel értelmében azonos a törzstartón értelmezett $M(V)$ merev mag rúdhalmazával. Az N_1 ábrában azokban a rudakban keletkeznek rúderők, amelyek a törzstartón értelmezett $A(V(f_1))$ aktív zónába tartoznak, valamint magában az f_1 fölös rúdban, hiszen az adott egységterhet az f_1 fölös rúdban működőnek tekintjük (2.5e ábra). Ez utóbbi rúdhalmaz a 2. Tétel értelmében azonos a törzstartón értelmezett $M(V) \cup f_1$ rúdhalmazával. Ugyanígy járhatunk el a többi – N_2, N_2, …, N_6 – ábrák esetén is (lásd a 2.5f-j ábrákat).

Ezt követően derítsük ki, hogy mely X_1, X_2,…, X_6 ismeretlenek térnek el zérustól. Tekintve, hogy a zérustól eltérő ismeretlenek függenek a teher intenzitásától, ezért ez utóbbi tulajdonságot fogjuk vizsgálni. E célból tekintsük a kompatibilitási egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{20} \\ e_{30} \\ e_{40} \\ e_{50} \\ e_{60} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} & e_{45} & e_{46} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} & e_{56} \\ e_{61} & e_{62} & e_{63} & e_{64} & e_{65} & e_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Most a (2.2) képletek és az előbbi aktív zónákra vonatkozó fejtegetéseink alapján (2.5d-j ábrák) határozzuk meg, hogy mely e_{i0} illetve e_{ij} tényezők térnek el zérustól. Például, mivel

nincs olyan rúd, amiben N_1 és N_2 is fellép, ezért $e_{12}=e_{21}=0$. Hasonló megfontolások alapján a további zérus tényezők is meghatározhatók, és ezeket behelyettesítve a kompatibilitási egyenletrendszer három alegyenletrendszererre esik szét:

$$[e_{10}] + [e_{11}][X_1] = \underline{0} \qquad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} e_{20} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{44} & e_{45} & 0 \\ e_{54} & e_{55} & e_{56} \\ 0 & e_{65} & e_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (2.6)$$

Az eredeti teher intenzitása a rúderőábrák közül egyedül az N_0 ábrára – és ezáltal csak az e_{i0} tényezőkre – gyakorol hatást, azaz példánkban az e_{10} és e_{20} tényezőkre. Ebből következően kizárólag a (2.4) és a (2.5) egyenletrendszer megoldása függ az eredeti teher intenzitásától. Következésképpen kizárólag a X_1, X_2 és X_3 ismeretlenek függnek az eredeti teher intenzitásától, tehát tipikusan $X_1=X_2=X_3\neq 0$, illetve $X_4=X_5=X_6=0$. Ezeket az eredményeket a (2.3) kifejezésbe behelyettesítve az kapjuk, hogy:

$$N_{\text{végleges}} = N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3$$

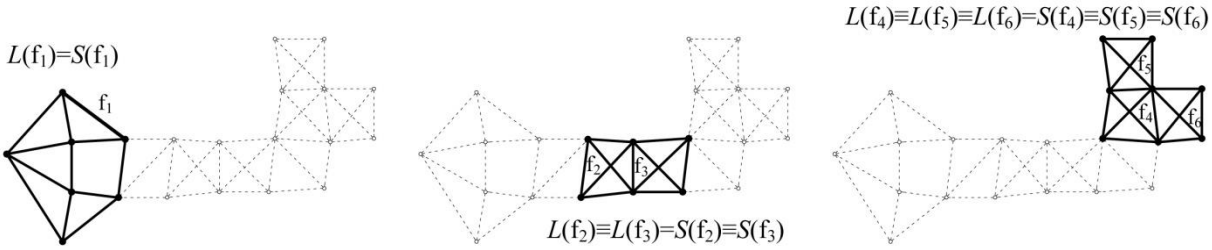
Az eredeti tartóban értelmezett $A(V)$ aktív zóna tehát a következő halmazzal azonos (2.5k ábra):

$$A(V) = M(V) \cup M(V(\mathrm{f}_1)) \cup \mathrm{f}_1 \cup M(V(\mathrm{f}_2)) \cup \mathrm{f}_2 \cup M(V(\mathrm{f}_3) \cup \mathrm{f}_3$$

Tekintve, hogy az $N_{\text{végleges}}$ rúderők függetlenek attól, hogy milyen törzstartót választunk, ennél fogva az aktív zóna fenti (az erőmódszeren alapuló) meghatározása is független tőle.

A bemutatott példa alapján most következtessünk az *általános eset*re.

Ehhez két új fogalmat vezetünk be. Az $M(V(\mathrm{f}_i))\cup\mathrm{f}_i$ alakú halmazokat a $V(\mathrm{f}_i)$ *csomópontpár bővített merev magjá*nak hívjuk, és $\overline{M}(V(\mathrm{f}_i))$-vel jelöljük. Például a 2.5e ábrán látható tartó $V(\mathrm{f}_1)$ csomópontpárjának bővített merev magja a 2.5e ábrán kiemelt tartórészből és az f_1 fölös rúdból képzett unióval egyezik meg. A *tartó magláncolatai*t a bővített merev magokból képezzük a következők szerint: minden bővített merev mag része egy, és csak egy magláncolatnak; az egymást legalább egy rúdban metsző bővített merev magok azonos magláncolatba kerülnek. Az f_i-t tartalmazó magláncolatot $L(\mathrm{f}_i)$-vel jelöljük. Értelemszerűen, ha f_i és f_j azonos magláncolatba tartozik, akkor $L(\mathrm{f}_i)\equiv L(\mathrm{f}_j)$. Például 2.5a ábrán látható rácsos tartónak három magláncolata van, melyeket a 2.6 ábrán mutatunk be (lásd a vastagon kiemelt tartórészeket).



2.6. ábra. Magláncolatok és sajátfeszültségi zónák.
Az ábrán a 2.5a ábrán látható tartó magláncolatait – és egyben sajátfeszültségi zónáit – mutatjuk be: a vastag vonallal kiemelt tartórészek mindegyike egy magláncolat, és egyben egy sajátfeszültségi zóna.

Vegyük észre az alábbi, általános összefüggéseket:

- ha f_i és f_j rudak azonos magláncolat elemei, akkor X_i és X_j a kompatibilitási egyenlet azonos alegyenletrendszerébe kerül
- az előzőekből következik, hogy minden magláncolathoz hozzárendelhető egy alegyenletrendszer
- ha egy adott $L(f_i)$ magláncolat rúdban metszi $M(V)$-t, akkor $e_{i0}\neq 0$, és ezért az $L(f_i)$-hez tartozó alegyenletrendszer ismeretlenjei függenek a teher intenzitásától; ellenkező esetben $e_{i0}=0$, és ezért az $L(f_i)$-hez tartozó alegyenletrendszer ismeretlenjei függetlenek lesznek az eredeti teher intenzitásától
- ha egy alegyenletrendszer ismeretlenjei függnek a tehertől, akkor a hozzárendelt magláncolat része az eredeti tartón értelmezett $A(V)$ aktív zónának; ellenkező esetben nem része

A fenti összefüggések alapján a következő tételt mondhatjuk ki:

3. Tétel:

Redundánsan merev rácsos tartó tetszőleges V csomóponthalmazának aktív zónája azonos az ugyanazon csomóponthalmaz (törzstartón értelmezett) merev magjából és az azt rúdban metsző magláncolatokból képzett unióval (lásd például a 2.5k ábrát), azaz:

$A(V)=M(V)\cup(\bigcup_{M(V)\cap L(f_i)\neq\emptyset} L(f_i))$,

ahol $\bigcup_{M(V)\cap L(f_i)\neq\emptyset} L(f_i)$ jelöli azon magláncolatok unióját, amelyek rúdban metszik $M(V)$-t.

Ezzel a redundánsan merev esetben is bemutattuk az aktív zóna és a merev mag kapcsolatát. A befolyásolt zóna kijelölése szempontjából most már nincs más hátra, mint bemutatni, hogy milyen módszerekkel jelölhető ki a merev mag a gráf-modell alapján.

Mielőtt azonban erre rátérnénk, a következő szakaszban rámutatunk egy a jelen szakasz eredményeihez szorosan kötődő, további érdekes eredményre is, amely a redundánsan merev tartók erőjátékának megértése szempontjából hasznos lehet.

2.2.5. *Sajátfeszültségi zóna – merev mag*

Redundánsan merev tartókban külső erők nélkül is ébredhetnek zérustól eltérő rúderők (jellemzően kinematikai terhek, például befeszülés hatására). Ezeket a rúderőket *saját-igénybevétel*eknek szokás nevezni, mivel azok önmagukkal tartanak egyensúlyt *(Korányi 1954; Kaliszky és szerzőtársai 2000)*. A tartó eme külső erők nélküli egyensúlyi állapotát sajátfeszültségi állapotnak hívják.

A jelen dolgozatban a *tartó egy sajátfeszültségi zónájá*nak hívjuk a tartónak egy rúdhalmazát (valamint a kapcsolódó csomópontokat), ha tetszőleges egyparaméteres kinematikai teherre megvalósul, hogy a zónában a rúderők önmagukat képesek kiegyensúlyozni, és erre a tulajdonságra nézve a rúdhalmaz minimális, azaz nincs olyan része, ami ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik. Például a 2.5a ábrán látható tartó sajátfeszültségi zónái a 2.6 ábrán kiemelt tartórészekkel egyeznek meg. Tekintve, hogy csupán fölös rudak képesek befeszülni (szükséges rudak nem), ezért minden sajátfeszültségi zóna tartalmaz legalább egy fölös rudat. Az f_i fölös rudat tartalmazó sajátfeszültségi zónát $S(f_i)$-vel jelöljük. Értelemszerűen, ha f_i és f_j fölös rudak azonos sajátfeszültségi zónába tartoznak, akkor $S(f_i) \equiv S(f_j)$.

A jelen szakaszban a sajátfeszültségi zóna és a merev mag közötti kapcsolatot mutatjuk ki.

Példaként keressük meg a 2.5a ábrán látható (ezúttal külső teher nélküli) tartó sajátfeszültségi zónáit. Az előző szakaszban vizsgált példához képest néhány változás lesz a külső erőrendszer hiánya miatt. Az N_0 ábrában minden rúderő zérus lesz, ezért az összes ei_0 terhelési tényező zérus lesz (i=1,2,…,6), tehát a (2.4), (2.5) és (2.6) alegyenletrendszerek homogénné válnak, és egymástól függetlenül lehet nem-triviális megoldásuk. A (2.4), (2.5), (2.6) alegyenletrendszerek nem-triviális megoldásai esetén tipikusan rendre az alábbi végleges rúderő ábrákat kapjuk a (2.3) képlet alapján:

$N_{\text{végleges}} = N_1X_1$

$N_{\text{végleges}} = N_2X_2 + N_3X_3$

$N_{\text{végleges}} = N_4X_4 + N_5X_5 + N_6X_6$

A 2. Tétel értelmében a fenti esetekben rendre az alábbi tartórészek rúdhalmazában ébrednek (önmagukat kiegyensúlyozó) végleges rúderők:

$M(V(f_1)) \cup f_1 = L(f_1)$

$M(V(f_2)) \cup f_2 \cup M(V(f_3) \cup f_3 = L(f_2) \equiv L(f_3)$

$M(V(f_4)) \cup f_4 \cup M(V(f_5) \cup f_5 \cup M(V(f_6) \cup f_6 = L(f_4) \equiv L(f_5) \equiv L(f_6)$

Minthogy az így kapott rúderők önmagukkal tartanak egyensúlyt, a fenti halmazok mindegyike egy sajátfeszültségi zóna (lásd a 2.6 ábrát), tehát:

$$S(f_1) = L(f_1)$$

$$S(f_2) \equiv S(f_3) = L(f_2) \equiv L(f_3)$$

$$S(f_4) \equiv S(f_5) \equiv S(f_6) = L(f_4) \equiv L(f_5) \equiv L(f_6)$$

Csakúgy, mint az aktív zóna esetén, a sajátfeszültségi zóna imént ismertetett meghatározása szintén független a törzstartóválasztástól.

Az imént ismertetett példa alapján az alábbi tételt mondhatjuk ki:

4. Tétel:
Redundánsan merev rácsos tartó magláncolatai egybeesnek a tartó sajátfeszültségi zónáival: azaz minden egyes magláncolat egy sajátfeszültségi zóna, és fordítva. Vagyis: $S(\mathrm{f}_i) = L(\mathrm{f}_i)$.

A 4. tételnek gyakorlati hasznosítási lehetőségei is vannak. Például ha egy magláncolat egyik rúdját kinematikai teher éri (pl. befeszülés), akkor ennek hatására az adott magláncolat minden rúdjában keletkezik rúderő, míg a magláncolaton kívüli rudakban zérus marad a rúderő. Ellenben ha a kinematikai teher olyan rudat érint, ami egyetlen magláncolatnak sem része, akkor ennek hatására a tartó egyetlen rúdjában sem ébred rúderő.

Ismert továbbá, hogy a befeszülésre kizárólag a fölös rudak képesek *(Kossalka 1920)*, szükséges rudak nem. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy magláncolatok rúdhalmaza a fölös rudak halmazával esik egybe, míg annak komplementer-halmaza a szükséges rudakat tartalmazza. Ez a felismerés a törzstartó-keresés során hasznosítható: az eredeti tartóból kizárólag magláncolatba tartozó rudat szabad eltávolítani.

2.2.6. Merev mag – gráf-modell

A jelen szakaszban azt mutatjuk be, hogy miként jelölhető ki a merev mag a tartó gráf-modellje alapján.

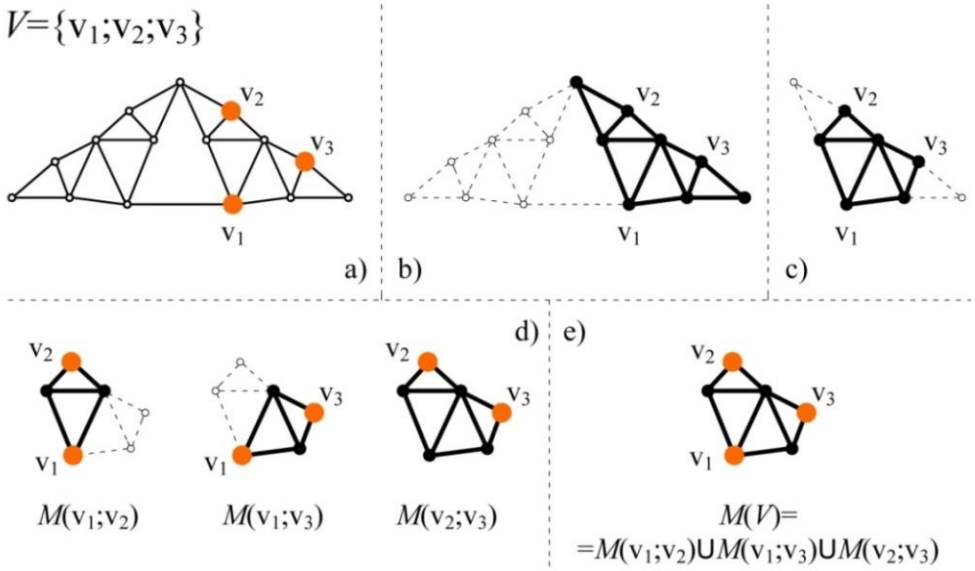
Tekintve hogy kizárólag merev szerkezeteket vizsgálunk, a merev magok minimális merevségének geometriai feltételei eleve teljesülnek, így elegendő pusztán a merev magok merevségének topológiai feltételeit – vagyis a minimális generikus merevség feltételeit – vizsgálni. Az utóbbi feltételeket – melyek önmagában a gráf-modell alapján ellenőrizhetők – részletesen tárgyaltunk a Bevezetés 1.2.1 szakaszában. Ezek ismeretében egy gyakorlott mérnök az egyszerűbb, a mérnöki gyakorlatban szokványos topológiai felépítésű szerkezetekben akár „ránézésre”, intuitív módon is képes meghatározni a merev magot.

A következőkben további három olyan összefüggésre, szabályra mutatunk rá, amelyek a merev mag *intuitív* kijelölését segítik elő. Példaként tekintsük a 2.7a ábrán látható tartót, és keressük abban az $M(V)$ merev magot.

1. szabály: Bizonyítható, hogy minimálisan merev tartónak bármely olyan minimálisan merev R része, ami V csomóponthalmazt tartalmazza, egyben $M(V)$-t is tartalmazza (lásd a 4. Segédtételt a 4. számú Mellékletben). Következésképpen, ha egy a V-t tartalmazó R tartórészről ránézésre megállapítottuk, hogy minimálisan merev, akkor $M(V)$ ezen belül keresendő. Ennek megfelelően példánkban $M(V)$ a 2.7b ábrán kiemelt, háromszögképzéses tartórészben keresendő.

2. szabály: Ha egy másodfokú csomópont nem eleme V-nek, akkor $M(V)$-nek sem eleme, hiszen a merev mag minimális méretű, és egy másodfokú csomópont eltávolítása (a hozzá csatlakozó rudakkal együtt) nem befolyásolja a minimális merevséget. Ebből kifolyólag ha a 2.7b ábráról sorra eltávolíthatjuk a másodfokú csomópontokat (lásd a 2.7c ábrát), akkor az így nyert tartórésznek szintén tartalmaznia kell $M(V)$-t.

3. szabály: Kihasználjuk, hogy jellemzően könnyebb egy csomópontpár merev magját megtalálni, mint egy többelemű csomóponthalmazét. Képezzük a V halmaz egymással nem-szomszédos csomópontpárjainak merev magjait (2.7d ábra), majd egyesítsük azokat (2.7e ábra). Bizonyítható, hogy az utóbbi unió éppen a keresett $M(V)$ merev maggal egyezik meg (lásd az 5. Segédtételt a 4. számú Mellékletben).



2.7. ábra. Az $M(V)$ merev mag kijelölése a tartó gráf-modellje alapján.
Egy rácsos tartó és annak egy megjelölt V csomóponthalmaza (a). A b) ábrán a tartó egy olyan részét ábrázoltuk, amelyről könnyen megállapítható, hogy minimálisan merev és tartalmazza V-t. A (b) ábrán kiemelt tartórészről eltávolítjuk azokat a másodfokú csomópontokat, melyek nem elemei V-nek, mert azok $M(V)$-nek sem lesznek elemei (c). A (c) ábrán kiemelt tartórészben képezzük a V halmaz egymással nem szomszédos csomópontpárjainak merev magjait (d). Az e) ábrán a (d) ábrán bemutatott merev magok unióját ábrázoltuk, amely megegyezik az $M(V)$ merev maggal.

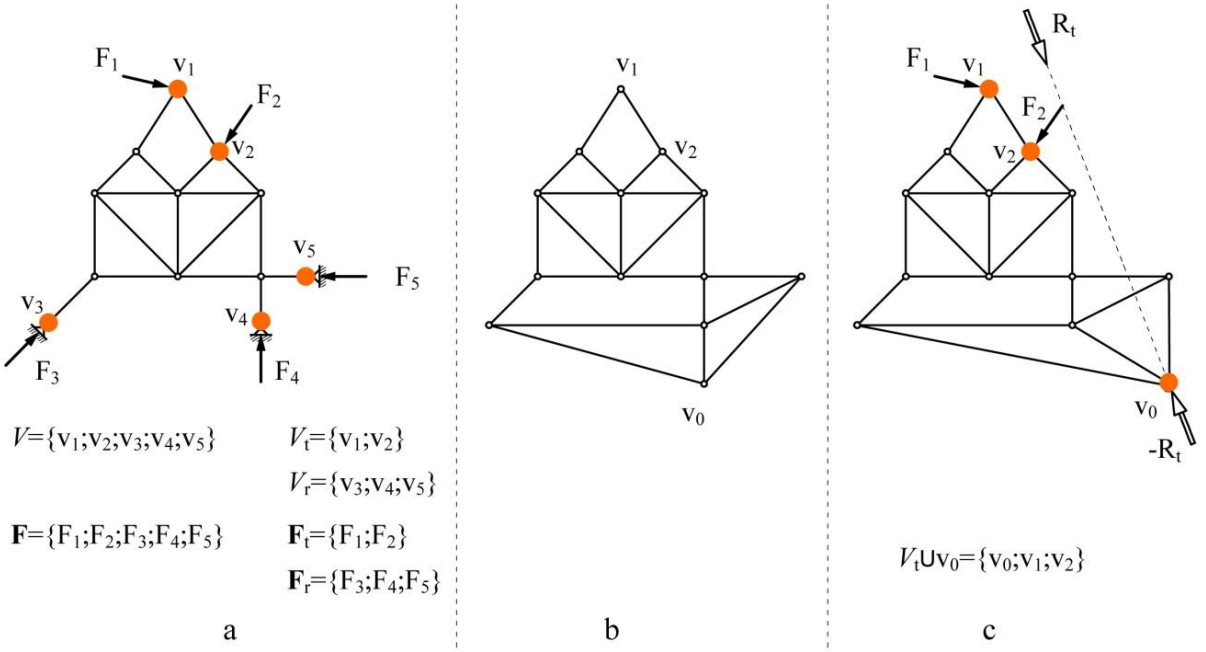
A mérnöki gyakorlatban szokatlan, bonyolult topológiai felépítésű, vagy nagy csomóponts-számú tartók esetén a merev mag és a magláncolatok (illetve azok gráf-modelljének) megtalálásához *számítógépes algoritmus*ra van szükség. Síkbeli esetekben a merev mag gráf-modellje egy minimálisan merev *feszített részgráf*, míg a magláncolatok gráf-modellje egy redundánsan merev gráf nem-triviális *M-komponens*eivel azonos. Síkbeli tartók esetén mindkét említett részgráf megtalálására létezik kombinatorikus algoritmus, lásd például a *(Berg és Jordán 2003)*-at, amely egy olyan algoritmust közöl, melynek lefutási ideje polinomiálisan függ a tartó csomópontszámától, így viszonylag gyors. A befolyásolt zóna síkbeli tartókban történő megkeresésére Dóbé Péter és Domokos Gábor készített két polinomiális időben futó számítógépes programot: az egyik program a Berg és Jordán-féle *(2003)* algoritmus implementációja *(Dóbé és Domokos 2014)*, míg a másik egy az ún. szubmoduláris függvény minimalizálására épülő algoritmust és implementációt tartalmaz *(Dóbé és Domokos 2011)*.

Ezzel befejeztük ama kapcsolatrendszer ismertetését, amely rámutat, hogy befolyásolt zóna meghatározható a tartó gráf-modellje alapján.

2.2.7. A zónák intuitív kijelölésére szolgáló algoritmusok

A jelen szakaszban bemutatjuk, hogy az előző szakaszokban ismertetett kapcsolatrendszer alapján milyen algoritmusok adhatók az aktív zóna, a befolyásolt zóna és a sajátfeszültségi zóna kijelölésére.

Korábban már említettük, a megtámasztott és a megtámasztás nélküli eseteket egységesen kívánjuk tárgyalni. Most bemutatjuk, hogy a megtámasztott tartók megtámasztás nélkülivé alakítása milyen következményekkel jár. Ezt a 2.8 ábrán szemléltetjük.



2.8. ábra. Megtámasztott tartó megtámasztás nélkülivé alakítása és annak következménye.
Az a) ábrán látható tartón a V csomóponthalmazon egy egyensúlyi külső erőrendszer hat. A tartót megtámasztás nélkülivé tesszük azáltal, hogy megtámasztó környezetet b) ábra szerint egy rácsos tartóval modellezzük. Ha a teher eredőjét R_t-vel jelöljük, akkor amennyiben a v_0 csomópontot az R_t hatásvonalába helyezzük, a megtámasztás nélküli tartó terhei kiegyensúlyozhatók a v_0 csomópontban (c). Ekkor a tartó megtámasztás nélküli másában a külső erők a $V_t \cup v_0$ csomóponthalmazon működnek (ahol V_t a terhelt csomópontok halmaza az eredeti tartóban).

Jelölje V azoknak a csomópontoknak a halmazát, amelyeken a megtámasztott tartóra ható **F** külső egyensúlyi erőrendszer működik. Jelölje V_t, illetve V_r a V-nek azt a részét, amelyen az $\mathbf{F}_t$ jelű erőjellegű terhek, illetve az $\mathbf{F}_r$ jelű reakcióerők működnek (természetesen, ha $\mathbf{F}_t$ egyensúlyi teher, akkor reakcióerők nem lépnek fel és akkor $V=V_t$), lásd a 2.8a ábrát.

Vezessük vissza a megtámasztott tartót egy megtámasztás nélküli tartóra a 2.8b ábra szerint. Ha a V_r halmaz nem üres (azaz ha a $\mathbf{F}_t$ nem egyensúlyi), akkor az előbbi átalakítás miatt az eredeti tartóban reakcióerőként funkcionáló erők belső rúderőkké válnak, és a tartóra így már csak a nem egyensúlyi $\mathbf{F}_t$ erőrendszer hat. Természetesen a tartó egyensúlyi állapotát továbbra is biztosítani kívánjuk. Ezt úgy érjük el, hogy a v_0 fiktív csomópontot az $\mathbf{F}_t$ erőrendszer R_t jelű eredőjének vonalába helyezzük (2.8c ábra), és az R_t eredőt a v_0-ban kiegyensúlyozzuk egy vele ellentétes, azonos nagyságú erővel.

Látható tehát, hogy amikor megtámasztás nélkülivé teszünk egy tartót, újra kell definiálnunk a tartónak azt a csomóponthalmazát, ahol a tartóra ható egyensúlyi külső erőrendszer működik: ezt a szerepet a $V_t \cup v_0$ halmaz fogja átvenni a V csomóponthalmaztól. A megtámasztottá tett tartókban tehát a $V_t \cup v_0$ halmazon működik a tartóra ható egyensúlyi külső erőrendszer, ezért ilyen tartókban az $A(V)$ aktív zóna helyett az $A(V_t \cup v_0)$ aktív zónát keressük.

A fentiek figyelembevételével az alábbi algoritmusok adhatók az aktív zóna, a befolyásolt zóna, illetve a sajátfeszültségi zóna kijelölésére:

Az $A(V)$ aktív zóna meghatározásának lépései:
minimálisan merev tartók esetén:

1/a) ha a tartó nincs támasztva, akkor folytatjuk a soron következő lépéssel; ellenkező esetben a tartót megtámasztás nélkülivé tesszük és kijelöljük a $V_t \cup v_0$ csomóponthalmazt – a továbbiakban ez utóbbi uniót értjük a V halmaz alatt
1/b) megkeressük $M(V)$ merev magot,
1/c) $A(V)$ az $M(V)$-vel egyezik meg.

redundánsan merev tartók esetén:

2/a) végrehajtjuk az 1/a) lépést
2/b) képezzük a tartó egy tetszőleges törzstartóját, melyet az f_i fölös rudak eltávolításával nyerünk ($i=1,2,3,\ldots,h$, ahol h a határozatlanság foka),
2/c) megkeressük a törzstartón értelmezett $M(V)$ merev magot,
2/d) megkeressük a törzstartón értelmezett $M(V(f_i))$ merev magokat,
2/e) minden egyes $M(V(f_i))$ merev magot kiegészítjük a megfelelő f_i fölös rúddal, így nyerjük az $\overline{M}(V(f_i))$ bővített merev magokat,
2/f) az $\overline{M}(V(f_i))$ bővített merev magokból létrehozzuk a magláncolatokat: az egymást rúdban metsző bővített merev magok ugyanabba a magláncolatba kerülnek,
2/g) uniót képzünk az $M(V)$ merev magból és az azt rúdban metsző magláncolatokból,
2/h) ez utóbbi unió megegyezik a keresett $A(V)$ aktív zónával.

A $B(v_1)$ befolyásolt zóna meghatározásának lépései:
minimálisan merev tartók esetén:

3/a) ha v_1 másodfokú csomópont, akkor a befolyásolt zóna az üres halmaz. Azonban ha v_1 legalább harmadfokú, akkor folytatjuk a soron következő lépéssel,
3/b) ha a tartó nincs megtámasztva, akkor folytatjuk a soron következő lépéssel; ellenkező esetben a tartót megtámasztás nélkülivé tesszük;
3/c) megkeressük az $M(V(v_1))$ merev magot,
3/d) $B(v_1)$ az $M(V(v_1))$-gyel egyezik meg.

redundánsan merev tartók esetén:

4/a) végrehajtjuk a 3/a), 3/b), 2/b) lépéseket,
4/c) megkeressük a törzstartón értelmezett $M(V(v_1))$ merev magot,
4/d) végrehajtjuk a 2/d), 2/e), és 2/f) lépéseket,
4/e) uniót képzünk az $M(V(v_1))$ merev magból és az azt rúdban metsző magláncolatokból,
4/f) ez utóbbi unió a keresett $B(v_1)$ befolyásolt zónával egyezik meg.

Egy tartó $S(f_i)$ sajátfeszültségi zónái meghatározásának lépései:

5/a) végrehajtjuk a 3/b), 2/b), 2/d), 2/e), és 2/f) lépéseket,

5/b) az előző lépésben nyert $L(f_i)$ magláncolatok az $S(f_i)$ sajátfeszültségi zónákkal azonosak

2.2.8. Aktív zóna és a rúdpótlás: a rúdpótlás új megfogalmazása

A jelen szakaszban az aktív zóna egy további mérnöki alkalmazási lehetőségére mutatunk rá: felhasználható a rúdpótlás (más néven rúdcsere) végrehajtására. A rúdpótlás műveletét valamint helyes végrehajtásának erőtani, illetve kinematikai feltételét már részletesen ismertettük az 1.2.2 szakaszban. Most egy további, *kombinatorikai feltétel*t adunk, amely arra a felismerésre épül, hogy az alábbi – az 1.2.2. szakaszban egyszer már ismertetett Korányi-féle *(1953)* – erőtani feltétel egy aktívzóna-keresési feladattal egyenértékű:

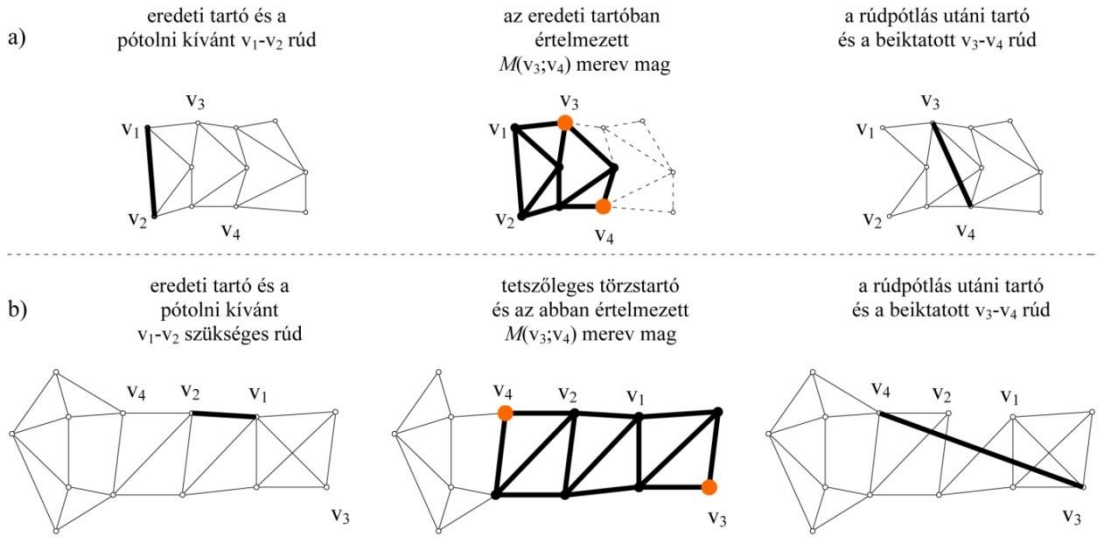
„Két rúd akkor és csak akkor pótolja egymást a merevség szempontjából, ha az egyik rúd helyén alkalmazott nullértékű erőpár a másik rúdban erőt ébreszt.” (Korányi 1953)

A ’nullértékű’ más szóval ’egyensúlyi’-t jelent, ezért – az aktív zóna definíciójából következően – a nullértékű erőpár az általa terhelt két csomópont aktív zónájában (és csak abban) fog rúderőt ébreszteni. Eme felismerés alapján az előző feltétel az alábbival egyenértékű:

Két rúd akkor és csak akkor pótolja egymást a merevség szempontjából, ha az eredeti tartóban az eltávolítani kívánt rúd része a beiktatni kívánt rúdhoz csatlakozó csomópontpár aktív zónájának.

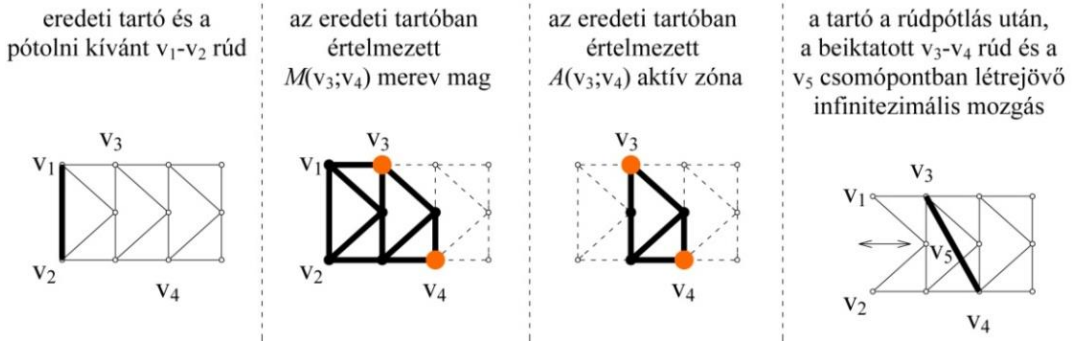
A 2.2.3 és 2.2.4 szakaszokban ismertetett 2. Tétel, illetve a 3. Tétel értelmében tipikus feladatok esetén az aktív zóna és a merev mag között kapcsolat mutatható ki, ezért ez utóbbi feltétel a következő kombinatorikai feltételre módosítható (lásd a 2.9a-b ábrákat):

Két szükséges rúd akkor és csak akkor pótolja egymást a merevség szempontjából, ha az eredeti tartóban (illetve redundánsan merev esetben az eredeti tartó törzstartójában) a beiktatandó rúddal összekötni kívánt csomópontpár merev magja tartalmazza az eltávolítandó rudat. (2.7)



2.9. ábra. Rúdpótlás az új, kombinatorikai feltétel alapján, tipikus feladatok esetén.
Rúdpótlás minimálisan merev tartóban (a), illetve redundánsan merev tartóban (b).

Hangsúlyozzuk azonban, hogy a (2.7) alatti kombinatorikai feltétel csupán az aktív zóna mérete szempontjából tipikus feladatokban alkalmazható. Atipikus feladatok esetén ugyanis egy csomópontpár aktív zónája nem jelölhető ki pusztán a tartó gráf-modellje alapján, lásd például a 2.10 ábrán bemutatott atipikus feladatot.



2.10. ábra. Atipikus feladat esetén a kombinatorikai feltétel nem alkalmas a rúdpótlás végrehajtására. Az $A(v_3,v_4)$ aktív zóna nem egyezik meg az $M(v_3,v_4)$ merev maggal, ezért a rúdcsere után a v_5 csomópontban infinitezimális mozgás jön létre, tehát a v_3-v_4 rúd merevség szempontjából nem pótolja a v_1-v_2 rudat.

2.2.9. Diszkusszió

Amint azt a fejezet elején hangsúlyoztuk, eredményeink kizárólag *síkbeli* rácsos tartókra vonatkoznak. Megjegyezzük azonban, hogy eme eredmények jóval általánosabb, matematikai eredményekhez is elvezettek *(Jordán, Domokos és Tóth 2013)*: elkészült az 1. Tétel, a 2. Tétel és a 3. Tétel egy másik, a dolgozatban ismertetett mérnöki szemléletű bizonyítástól eltérő, matematikai nyelvezetű és szemléletű bizonyítása, valamint a síkbeli eredmények kiterjesztése térbeli és annál magasabb dimenziójú esetekre (az utóbbiak természetesen csupán elméleti esetek, és mérnöki szempontból nem relevánsak). A síkbeli illetve az annál magasabb dimenziójú esetek közötti fennálló hasonlóságok, illetve eltérések az alábbiakkal foglalhatók össze:

Mind a síkbeli, mind a térbeli és a magasabb dimenziójú esetekben *igaz*, hogy:

a) tipikus rácsostartó-feladatokban egy adott csomópont befolyásolt zónája azonos a csomóponttal szomszédos csomóponthalmaz aktív zónájával, azaz igaz, hogy: $B(v_i)=A(V(v_i))$,
b) a merev mag egyértelmű, és ugyanúgy definiálható, mint síkban,
c) kombinatorikus jellemzés adható a befolyásolt zónára és az aktív zónára.

A síkbeli esettől eltérően a térbeli és a magasabb dimenziójú esetekben *nem igaz*, hogy:

d) tipikus rácsostartó-feladatokban egy adott V csomóponthalmaz aktív zónája megegyezik az ugyanazon csomóponthalmaz merev magjával, azaz: $A(V)=M(V)$,
e) a merev mag alkalmas a befolyásolt zóna és az aktív zóna kombinatorikus jellemzésére,
f) ismert olyan polinomiális, determinisztikus algoritmus, mellyel a befolyásolt zóna, illetve az aktív zóna megtalálható (egy algoritmus determinisztikus, ha minden időpontban egyértelmű, hogy mi lesz a következő lépés),
g) ismert olyan polinomiális, determinisztikus algoritmus, mellyel a merev mag megtalálható,

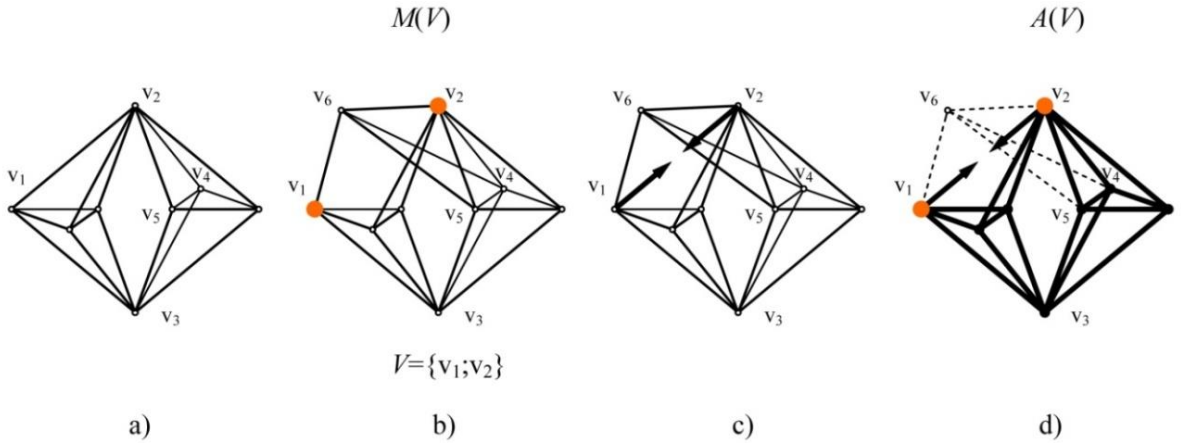
h) ismert olyan polinomiális, determinisztikus algoritmus, mellyel a minimális generikus merevség ellenőrizhető.

Eme sajátosságok közül a d), g) és h) ponthoz kommentárt is fűzünk.

A g) és a h) sajátosságnak az az oka, hogy a D≥3 esetekben ez idáig nem ismert a minimális generikus merevség szükséges és elégséges feltétele. Például a síkbeli minimális generikus merevség Laman *(1970)* által megfogalmazott szükséges és elégséges feltétele (lásd a Bevezetés 1.2.2 szakaszát) nem általánosítható a térbeli esetekre. Térben ugyanis az alábbi két feltétel a minimális merevségnek csak szükséges, de nem elégséges feltétele:

- e=3v-6 (ahol e illetve v a gráf éleinek illetve csomópontjainak számát jelöli)
- a gráf bármely feszített részgráfja legfeljebb 3v'-6 élt tartalmaz (ahol v' a részgráf csomópontjainak számát jelöli és v'≥3).

A legismertebb példa erre a *dupla-banán térbeli gráf* (2.11 ábra): teljesíti a fenti feltételeket, mégsem merev (a két „banán" el tud elfordulni egymáshoz képest a v_2-v_3 tengely körül).



2.11. ábra. Annak szemléltetése, hogy térben nem igaz, hogy *A*(*V*)=*M*(*V*).

Az a) ábrán látható *dupla-banán gráf*ból élhasítással minimálisan merev gráfot képzünk a b) ábra szerint, az így nyert gráf egyben az *M*(*V*) merev mag. Ha a b) ábrán látható tartó *V* csomóponthalmazára egyensúlyi erőpárt helyezünk a c) ábra szerint, akkor a d) ábrán kiemelt rudakban ébred rúderő. Térben tehát nem igaz, hogy *A*(*V*)=*M*(*V*).

A d) pontban ismertetett sajátosság szintén a dupla-banán gráf példáján látható be. Az ilyen gráf-modellel rendelkező szerkezetek jellemzője, hogy azok statikailag egyszerre túlhatározottak és határozatlanok anélkül, hogy a szerkezet geometriája degenerált lenne: azaz a szerkezet egyszerre mechanizmus és ugyanakkor a teljes szerkezet képes sajátfeszültségi állapotban lenni. (Megjegyzendő, hogy ilyen viselkedésre síkban nem találunk példát.) Képezzünk egy ilyen dupla-banán rácsos szerkezetből a 2.11b ábrán látható tartót a térbeli élhasítás műveletével: a meglévő v_1-v_2 élbe iktassuk be az új v_6 csomópontot, amit a v_4 és v_5 meglévő csomópontokhoz is hozzákapcsolunk két új rúddal. Az így nyert szerkezet már minimálisan merev, és a benne értelmezett *M*(*V*) merev mag azonos magával a tartóval. Helyezzünk most eme tartóra egy egyensúlyi erőpárt a v_1-v_2 egyenes vonalába (2.11c ábra). Az erőpár hatására a 2.11d ábrán vastagon kiemelt rudakban ébred rúderő, hiszen a bennük lévő belső erőkből és

az erőpárból álló erőrendszer képes egyensúlyi állapotban lenni, aminek az az oka, hogy a dupla-banán alakú rácsos tartó képes sajátfeszültségi egyensúlyi állapotban lenni. Látható tehát, hogy a 2.11b ábrán látható térbeli tartóban az $A(V)$ valóban nem azonos $M(V)$-vel.

Az ismertetett okok miatt a térbeli és annál magasabb dimenziójú esetekben a befolyásolt zóna és az aktív zóna algoritmikus megtalálása egyelőre akadályokba ütközik.

2.3. GEOMETRIAI ÉRZÉKENYSÉG

A jelen alfejezetben tárgyalt, elért eredményeket a *(Tóth és Domokos 2009; Tóth, Domokos és Gáspár 2009; Tóth 2011; Tóth 2012; Jordán, Domokos és Tóth 2013)* munkákban publikáltuk.

Az előző alfejezetben azzal foglalkoztunk, hogy miképpen jelölhető ki a befolyásolt zóna pusztán a tartó gráf-modelljének ismeretében, kombinatorikus eszközökkel. A jelen alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy a tartók mennyire érzékenyek a csomóponti tökéletlenségekre, zavarásokra. Ennek jellemzésére vezettük be az „s” *geometriai érzékenység index* (röviden *érzékenység*) fogalmát a 2.1.1 szakaszban. Célunk minimális és maximális érzékenységű tartókat mutatni, valamint felkutatni, hogy az érzékenység milyen tényezőkkel csökkenthető, illetve növelhető.

2.3.1. Minimális és maximális érzékenységű minimálisan merev rácsos tartók

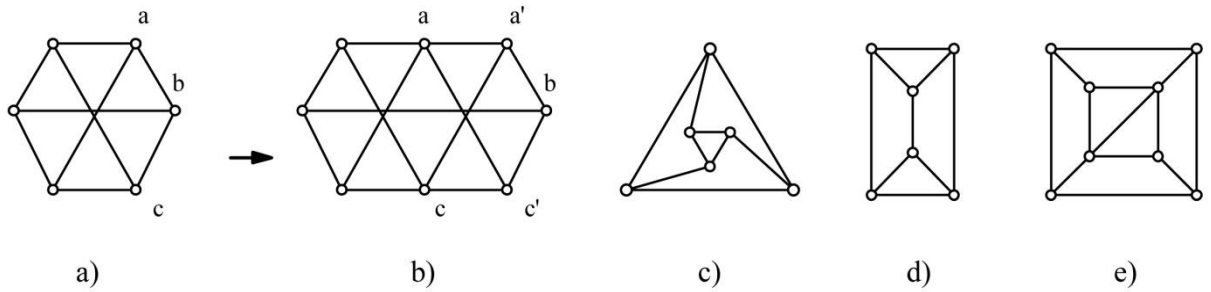
A jelen szakaszban maximális illetve minimális érzékenységű, megtámasztás nélküli minimálisan merev rácsos tartókat, illetve azok gráf-modelljeit mutatjuk be.

Elsőként maximális érzékenységű tartókra mutatunk példákat, azaz amelyek esetén s=1. Ez az egyenlőség olyan tartókban áll fenn, amelyekben minden belső csomópont befolyásolt zónája magával a tartóval egyezik meg, azaz – az 1. és a 2. Tétel értelmében – minden $M(V(v_i))$ merev mag azonos a teljes tartóval (i=1,2,…,c, ahol c a tartó belső csomópontjainak száma).

Ilyen tulajdonsággal bírnak például azok a rácsos tartók, amelyek gráf-modellje egy legalább 6 csomópontú *speciális gráf*. Speciálisnak nevezünk egy G minimálisan merev gráfot, ha G minden H merev (valódi) részgráfja egy teljes gráf (és ebből következően minden ilyen H gráf egy teljes gráf két vagy három csomóponton) *(Jackson és szerzőtársai 2006)*. Speciális gráf például a $K_{3,3}$ gráf (vagy más néven Pascal-hatszög, lásd a 2.12a ábrát), a prizma gráf (2.12c ábra), illetve a 2.12d ábrán látható gráf. Továbbá speciális minden olyan gráf, ami a $K_{3,3}$-ból kapható meg a 2.12a és 2.12b ábrán bemutatott művelet tetszőleges számú ismétlésével. A speciális gráfok száma tehát végtelen.

Egy legalább 6 csomópontú speciális gráf bármely csomópontjának fokszáma legalább 3. (Ellenkező esetben a gráfnak lenne legalább egy másodfokú csomópontja, amit a csatlakozó rudakkal együtt a gráfból elvéve egy minimum ötcsomópontú merev részgráfhoz jutunk, ami a speciális gráf definíciója alapján teljes gráf kell, hogy legyen. Könnyű belátni, hogy e minimum ötcsomópontú teljes részgráf redundánsan merev lesz, ami viszont egy minimálisan

merev gráfban lehetetlen.) Bizonyítható (lásd a 6. Segédtételt a 4. számú Mellékletben, valamint az 1. Tételt és a 2. Tételt), hogy amennyiben egy v_i csomópont fokszáma legalább 3, akkor a $B(v_i)$ befolyásolt zóna tartalmazza a v_i csomópontot. Következésképpen a legalább 6 csomópontú speciális gráfok esetén minden csomópont befolyásolt zónája a tartó gráf-modelljének egy legalább 4 csomópontú, minimálisan merev részgráfjával (más szóval egy legalább 4 csomópontot tartalmazó merev maggal) egyezik meg, amely gráf csak akkor lehet minimálisan merev, ha az magával a G gráffal egyezik meg (hiszen G-nek definíció szerint csak 3 és 2 csomópontú valódi merev részgráfjai vannak). Ezért ilyen tartókban minden csomópont befolyásolt zónája maga a teljes tartó. Ezzel beláttuk, hogy azok a rácsos tartók, amelyek gráf-modellje egy legalább 6 csomópontú speciális gráf, maximális érzékenységűek.



2.12. ábra. Az ábrán látható gráfok olyan rácsos tartók gráf-modelljei, melyek érzékenysége maximális, azaz amelyekben s=1 (tipikus geometria esetén).

Az a)-d) ábrákon speciális gráfok, míg az e) ábrán egy nem speciális gráf látható.

Azonban nem csak ilyen – speciális gráf gráf-modellű – rácsos tartók lehetnek maximális érzékenységűek, hanem például az olyan rácsos tartók is, melyeknek a gráf-modellje a 2.12e ábrán látható – nem speciális – gráffal egyezik meg. Vegyük észre, hogy az összes, általunk talált és mutatott maximális érzékenységű minimálisan merev rácsos tartó vegyes képzésű rácsos tartó, azaz nem állítható elő pusztán a Henneberg 1-es művelettel. Sejtésünk szerint egyszerű képzésű minimálisan merev rácsos tartó nem lehet maximális érzékenységű.

Most keressünk kis érzékenységű tartókat. Jelölje c_3 azoknak a csomópontoknak a számát, amelyeknek a fokszáma legalább 3. Minden legalább harmadfokú v_i csomópontra fennáll, hogy $c(B(v_i))\geq d(v_i)+1$ (ahol $c(B(v_i))$ jelöli a $B(v_i)$ befolyásolt zóna csomópontszámát, $d(v_i)$ pedig a v_i jelű csomópont fokszámát). Jelölje c illetve r a tartó csomópontszámát illetve rúdszámát. Így azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{c} c\big(B(v_i)\big) \geq \sum_{i=1,d(v_i)=2}^{c} (d(v_i)-2) + \sum_{i=1,d(v_i)>2}^{c} (d(v_i)+1) = \sum_{i=1}^{c}\big(d(v_i)\big) - 2c + 3c_3 \qquad (2.8)$$

Vegyük észre továbbá, hogy egy legalább 4 csomópontot tartalmazó minimálisan merev rácsos tartóban $c_3\geq 2$ kell legyen. Mivel a (2.8)-ban szereplő összeg-tagban a tartó minden rúdjához tartozó csomópontpárt kétszer számoltunk meg, illetve az összeg-tagban szereplő 2-est minden csomópont esetén levontuk, továbbá tudjuk, hogy $c_3\geq 2$, valamint hogy $2c=r+3$, ezért az egyenlőtlenséget tovább alakíthatjuk a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{c} \mathrm{c}(B(\mathrm{v}_i)) \geq \sum_{i=1}^{c} \big(d(\mathrm{v}_i)\big) - 2c + 3c_3 \geq 2r - 2c + 6 = 2c$$

Tekintve hogy a befolyásolt zónák a tartónak minimálisan merev részei, ezért érvényes a rúdszámszabály, azaz $2c(B(\mathrm{v}_i))=r(B(\mathrm{v}_i))+3$. Így az előbbi egyenlőtlenség a következőképpen alakítható tovább:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{c} r\big(B(\mathrm{v}_i)\big) + \frac{3c}{2} \geq 2c$$

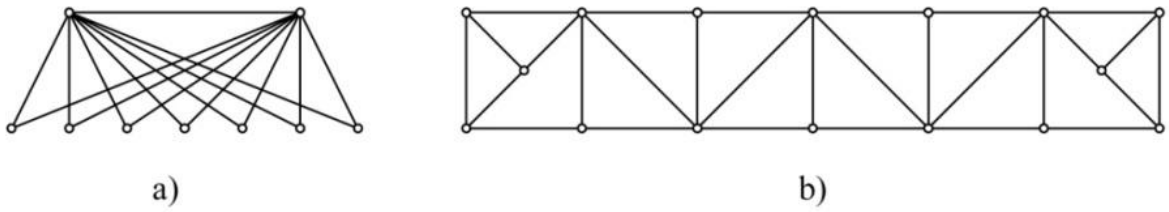
Mindkét oldalt beszorozva 2-vel, továbbá figyelembe véve a $2c=r+3$ egyenlőséget, majd rendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{c} r\big(B(\mathrm{v}_i)\big) \geq \frac{r+3}{2}$$

Ezt behelyettesítve a geometriai érzékenység képletébe azt kapjuk, hogy:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{c} r\big(B(\mathrm{v}_i)\big)}{c * r} \geq \frac{r+3}{2 * c * r} = \frac{r+3}{(r+3) * r} = \frac{1}{r}$$

Ehhez a korláthoz olyan tartók esetén juthatunk közel, melyeket egyetlen rúdból képzünk úgy, hogy minden további csomópontot ennek a rúdnak a végcsomópontjaihoz kapcsolunk két új rúddal (lásd a 2.13a ábrát).



2.13. ábra. Olyan minimálisan merev rácsos tartók gráf-modelljei, amelyek érzékenysége minimális.
Az (a) ábrán látható gráfban nincs kikötés a csomópontok fokszámára vonatkozóan, míg a (b) ábrán bemutatott gráfban minden csomópont fokszáma legalább 3.

Az olyan tartók esetén, melyekben a csomópontok fokszáma legalább 3, a (2.8) kifejezéshez hasonlóan azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{c} \mathrm{c}(B(\mathrm{v}_i)) \geq \sum_{i=1}^{c} (d(\mathrm{v}_i) + 1) = c + 2r = c + 2(2c - 3) = 5c - 6$$

Majd figyelembe véve, hogy $2c(B(\mathrm{v}_i))=r(B(\mathrm{v}_i))+3$, valamint hogy $2c=r+3$, majd rendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{c} r\big(B(\mathrm{v}_i)\big) \geq \frac{7r-3}{2}$$

Ezt behelyettesítve a geometriai érzékenység képletébe az alábbi eredményt kapjuk:

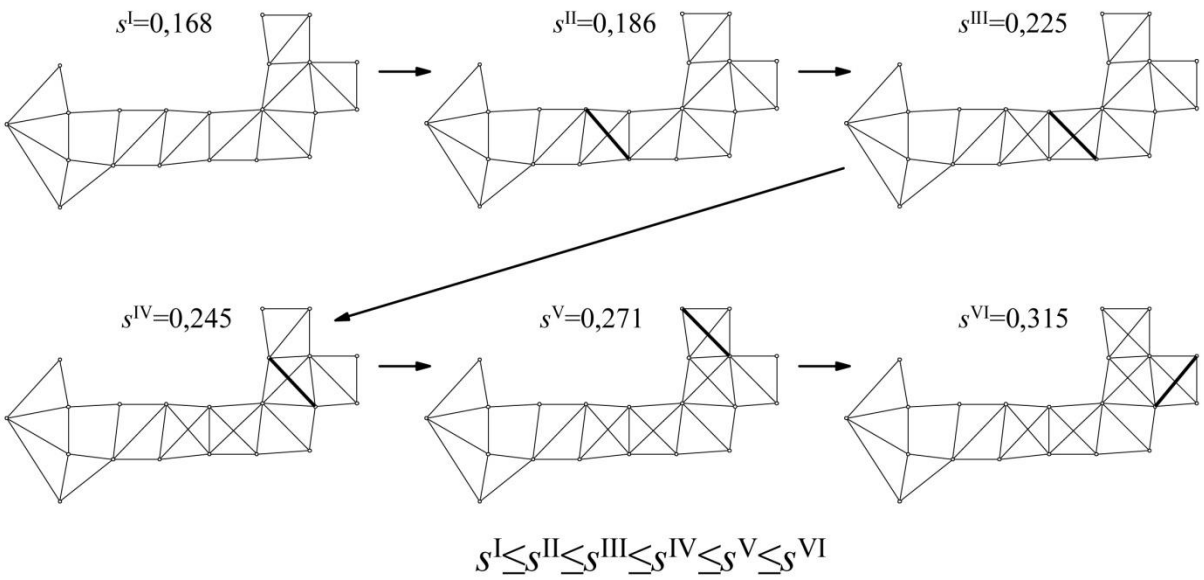
$$s = \frac{\sum_{i=1}^{c} r\big(B(\mathrm{v}_i)\big)}{c * r} \geq \frac{7r - 3}{2 * c * r} = \frac{7(r+3) - 24}{(r+3) * r} = \frac{7}{r} - \frac{24}{(r+3) * r}$$

Ez utóbbi korlát olyan tartók esetén közelíthető meg, melyekben majdnem minden v_i csomópontra igaz, hogy a $\mathrm{v}_i \cup V(\mathrm{v}_i)$ csomóponthalmaz és az azok között lévő összekötő rudak halmaza megegyezik az $M(V(\mathrm{v}_i))$ merev maggal. Ilyen tartók képezhetők egy háromszögből kiindulva a következő művelet tetszőleges számú ismételt alkalmazásával: a tartóhoz adunk egy új v' csomópontot és két új v'-a, v'-b rudat, ahol a-b olyan rúd, ami szomszédos egy másodfokú csomóponttal; végül két Henneberg 2 művelettel zárjuk a műveletsort (2.13b ábra).

2.3.2. A rúdszám növelésének hatása

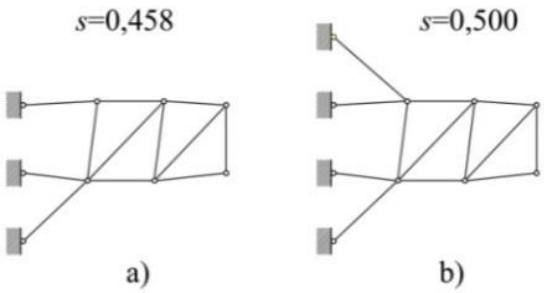
Az előző szakaszban kizárólag minimálisan merev tartókat vizsgáltunk, melyek jellemzője, hogy kizárólag szükséges rudakkal rendelkeznek. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy a fölös rudak számának emelése – azaz a tartó statikai határozatlansági fokának növelése – milyen hatással van az érzékenységre.

Az 1. Tétel, a 2. Tétel és a 3. Tétel (lásd a 2.2.2-2.2.4 szakaszokat) értelmében a befolyásolt zóna minimálisan merev tartók esetén egyetlen merev maggal egyezik meg, míg redundánsan merev esetekben a befolyásolt zóna rendszerint több alkalmasan kijelölt merev magból képzett unióval azonos. Következésképpen, ha egy minimálisan merev tartót egy fölös rúddal bővítünk (azaz redundánsan merevvé tesszük), akkor lesz olyan csomópont a tartóban, aminek ennek következtében nagyobb lesz a befolyásolt zónája, és ezáltal a tartó érzékenysége növekedni fog (lásd a 2.14 ábrát). Tehát a fölös rudak számának növelésével az érzékenység monoton nő. Ha egy tartóban a fölös rudak száma eléri a maximumot (azaz a tartó gráfmodellje egy teljes gráf), akkor az érzékenység is maximális lesz, azaz s=1.



2.14. ábra. A rúdszám (azaz a statikai határozatlansági fok) növelése az érzékenység monoton növekedését idézi elő.

Az előbbiekből következik továbbá, hogy egy merev tárcsából képzett rácsos tartót minimálisan merev megtámasztással látunk el, akkor kevésbé érzékeny tartót kapunk, mint ha redundánsan merev magtámasztást alkalmazunk (lásd a 2.15 ábrát).



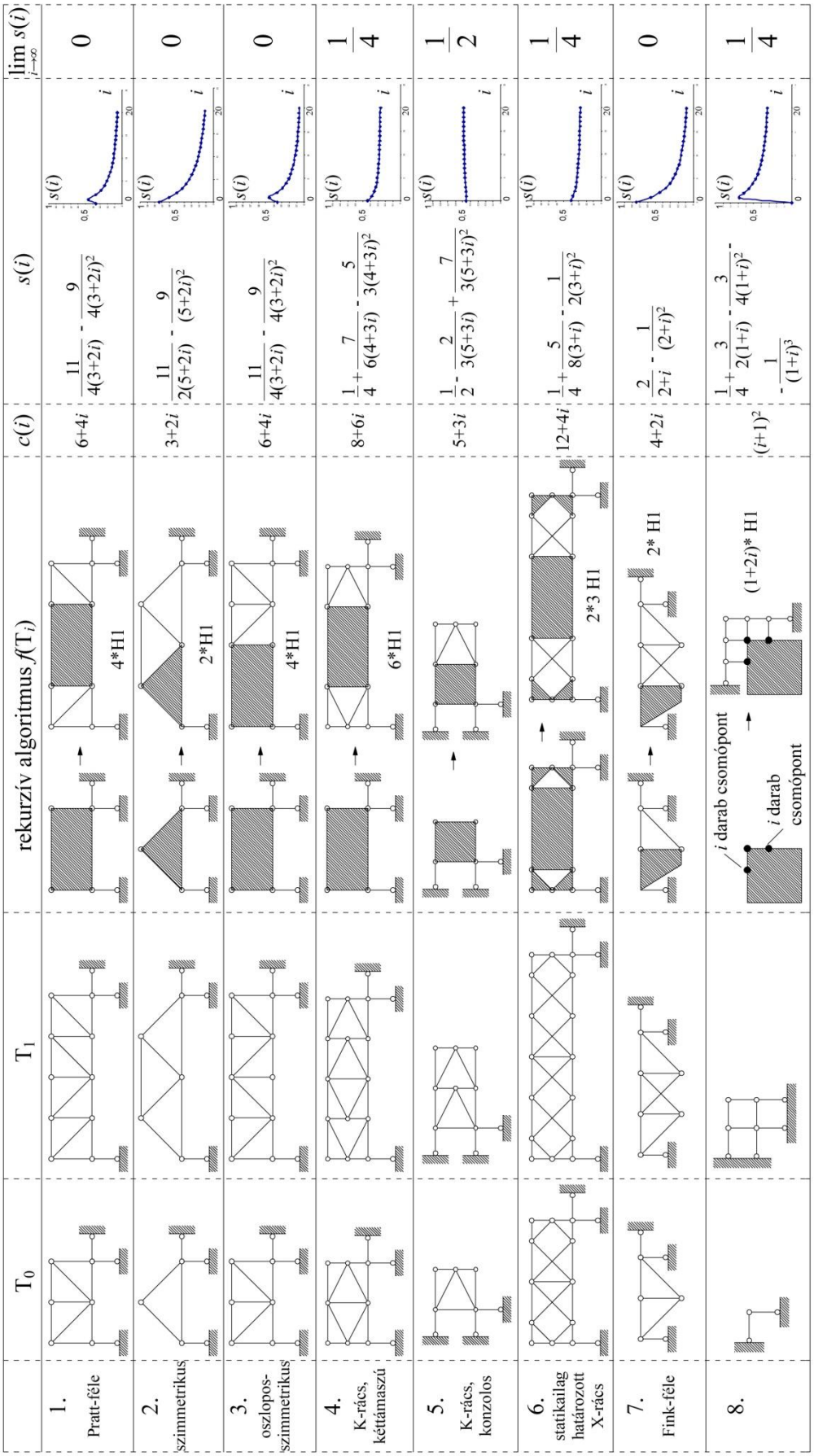
2.15. ábra. Két hasonló felépítésű, de eltérő megtámasztású tartó érzékenységének összehasonlítása.
A minimálisan merev megtámasztású tartó kevésbé érzékeny, mint a redundánsan merev magtámasztású.

2.3.3. Statikailag határozott rácsostartó-családok érzékenysége

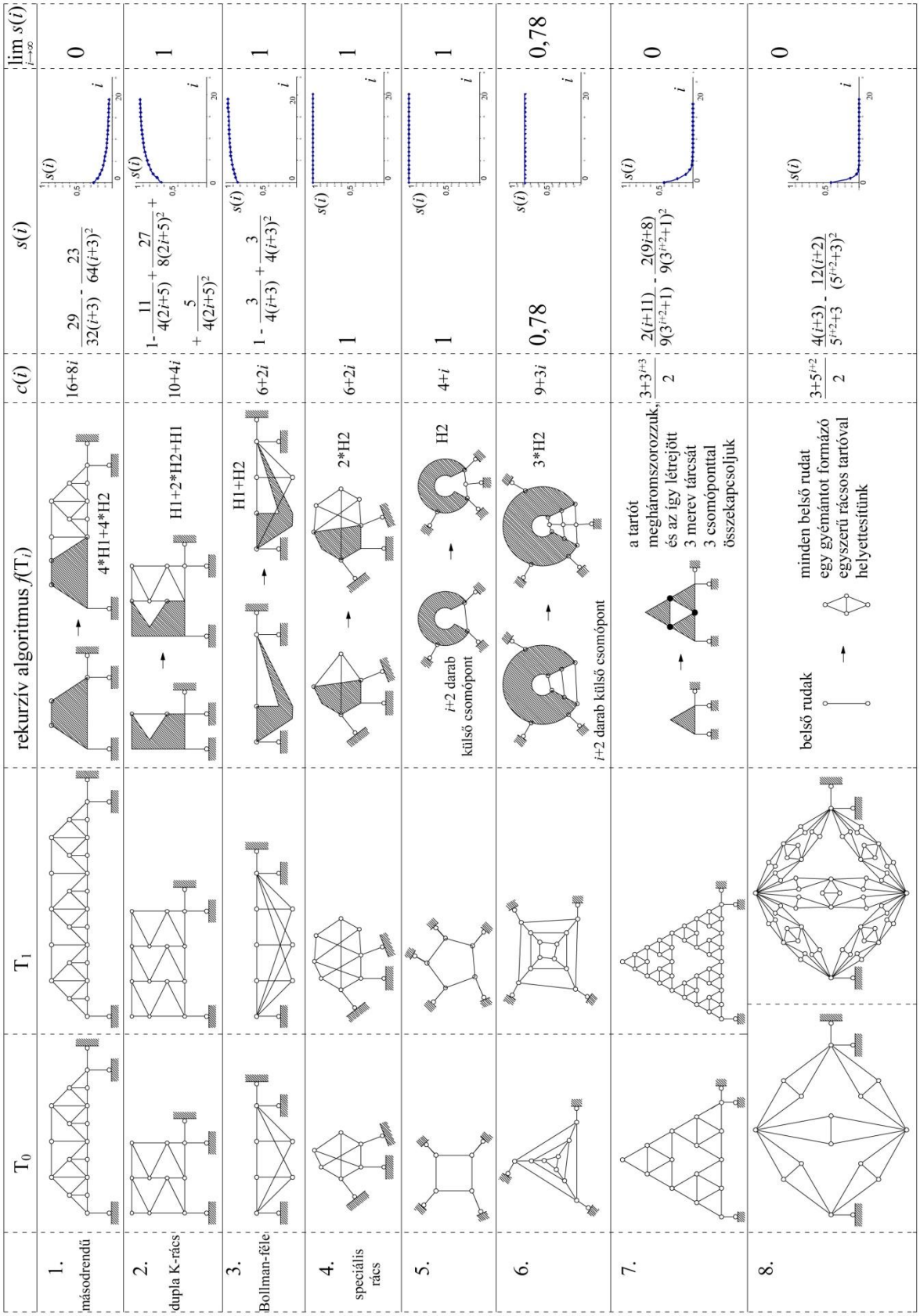
Az egyedi rácsos tartók érzékenységének tanulmányozásáról áttérünk a rácsos tartókból álló sorozatok – ún. *tartócsaládok* – érzékenységének vizsgálatára. Először bevezetjük a rácsostartó-család fogalmát, bemutatjuk, hogy miként képezhetünk statikailag határozott rácsostartó-családokat, végül megvizsgáljuk, hogy az ilyen családokon belül hogyan változik a geometriai érzékenységi index, van-e határértéke, és ha igen, akkor ez mennyi. Az ábrák jobb átláthatósága érdekében az ábrákon a rácsos tartók gráf-modelljeit fogjuk feltüntetni.

Egy (diszkrét) T_i *rácsostartó-családot* egy T_0 kiinduló rácsos tartóból az $f(T_i)$ rekurzív bővítési lépések sorozatával képzünk, azaz: $T_{i+1}=f(T_i)$, lásd a 2.16 és a 2.17 ábra első négy oszlopát.

Amennyiben statikailag határozott rácsostartó-családot kívánunk képezni (lásd a 2.16 és 2.17 ábrákat), az $f(T_i)$ bővítési lépés a kiinduló rácsos tartó statikai határozottságát (azaz a minimális merevségét) megőrző művelet(ek)ből áll. Ilyen műveleteket ismertettünk a Bevezetés 1.2.2 szakaszában. Ezek közül kiemelten foglalkoztunk a Henneberg 1 (H1) és a Henneberg 2 (H2) elemi tartógeneráló műveletekkel, mert azok különlegessége, hogy velük bármely minimálisan merev rácsos tartó létrehozható. Következésképpen tehát a minimálisan merev tartócsaládok $f(T_i)$ lépései „lebonthatók” a H1 és a H2 elemi műveletekre (lásd a 2.16 és 2.17 ábrák negyedik oszlopát). Ahogy azt már a Bevezetés 1.2.3 szakaszában részletesen kifejtettük, ez utóbbi két elemi művelet két diszjunkt matematikai osztályra osztja a minimálisan merev rácsos tartókat: az *egyszerű* rácsos tartók felépíthetők tisztán a H1 művelettel, míg az *összetett* rácsos tartók nem. A 2.16 ábrán egyszerű rácsostartó-családokat, míg a 2.17 ábrán összetett rácsostartó-családokat mutatunk be.



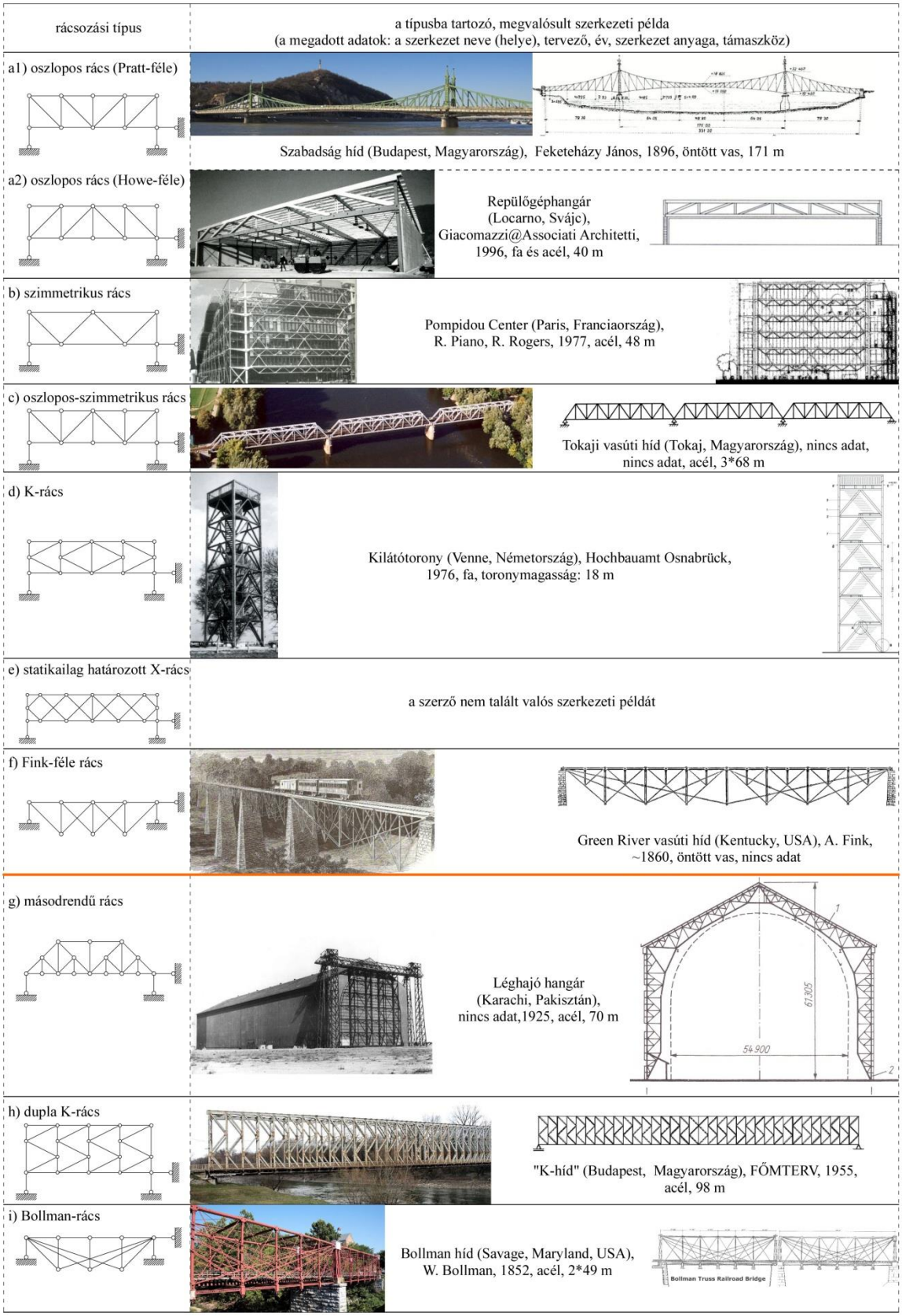
2.16. ábra. Egyszerű rácsostartó-családok geometriai érzékenysége



2.17. ábra. Összetett rácsostartó-családok geometriai érzékenysége

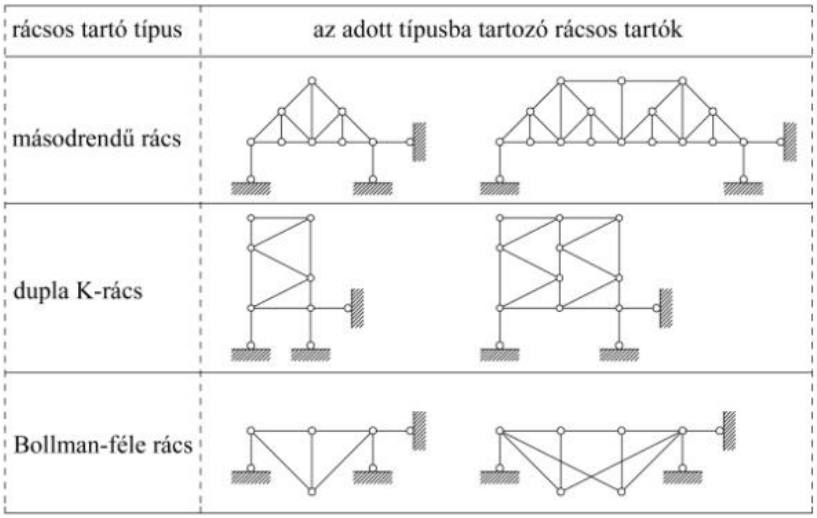
A mérnökök azonban egyéb tulajdonságok – például geometriai alak, rácsozási típus, szerkezettípus – alapján is szokták „osztályozni", típusokba sorolni a gyakorlatban elterjedt rácsos tartókat *(Gáspár és Tarnai 2002)*. Habár ezek az osztályozások matematikai értelemben nem minden esetben egzaktak, nagymértékben segítik a rácsos tartók mechanikai viselkedésének megértését. Ezek közül vizsgálatainkban a *minimálisan merev rácsozási típusok*nak van jelentősége, melyek a következők (lásd a 2.18 ábrát) *(Gáspár és Tarnai 2002; Kollár 2010; Korányi 1957)*:

a) oszlopos rács (két típusa van: a Pratt-féle illetve a Howe-féle)
b) szimmetrikus rács (más néven Warren-féle rács)
c) oszlopos-szimmetrikus rács (más néven oszlopos Warren-féle rács)
d) K-rács
e) statikailag határozott X-rács (más néven statikailag határozott kétszeres szimmetrikus rács vagy statikailag határozott kétszeres Warren-féle rács)
f) Fink-féle rács
g) másodrendű rács (pontosabban: oszlopos-szimmetrikus rács másodrendű ráccsal)
h) dupla K-rács
i) Bollman-féle rács



2.18. ábra. Minimálisan merev rácsozási típusok és azok szemléltetése megépült szerkezeti példákon.
(A képek forrásait az 5. számú Melléklet tartalmazza.)

Vegyük észre, hogy az azonos rácsozási típusba tartozó tartók nem feltétlenül tartoznak ugyanabba az osztályba, lásd például a 2.19 ábrát: az első oszlopban látható tartók az egyszerű rácsos tartók osztályába tartoznak, míg a második oszlopban bemutatott tartók az összetett rácsos tartók osztályába. Továbbá figyeljük meg, hogy a rács-típusok között lehetnek átfedések is, bár ilyen esetben a két típus metszethalmaza legfeljebb egy elemet tartalmaz: például a 2.16 ábra bal felső sarkában látható tartó egyszerre Pratt-féle rács és oszlopos szimmetrikus rács. Ennek ellenére elmondható, hogy *minden* olyan tartó, ami az a)-f) típusok valamelyikébe tartozik, az egyben az egyszerű rácsos tartók osztályába tartozik, míg *majdnem minden* olyan tartó, ami a g)-i) típusok valamelyikébe tartozik, az egyben az összetett rácsos tartók osztályába tartozik.



2.19. ábra. Előfordulhat, hogy azonos típusba tartozó rácsos tartók eltérő osztályba tartoznak (értsd: az egyszerű illetve az összetett rácsos tartók osztályába).
Az egyes sorokban azonos rácsozási típusú tartók láthatók, azonban míg az első oszlopban bemutatott tartók az egyszerű rácsos tartók osztályába tartoznak, addig a második oszlopban bemutatott tartók az összetett rácsos tartók osztályába.

A jelen szakaszban olyan családokat fogunk tanulmányozni, melyek a rácsos tartó osztályokkal illetve a rácsozási típusokkal a következő viszonyban vannak:

- a család minden tagja ugyanabba az osztályba tartozik, értsd: az egyszerű (2.16 ábra) vagy az összetett rácsos tartók (2.17 ábra) osztályába
- a család vagy része egy adott rácsozási típusnak vagy egyetlen rácsozási típusnak sem része (például a 2.16 ábrán az 1-7. sorszámú családok részei valamely rácstípusnak, míg a 8. sorszámú család nem).

Egy tartócsalád i-edik tagjának $s(i)$ érzékenységét a 2.1.1 szakaszban ismertetett (2.1) képlet alapján a következő képlettel írhatjuk le:

$$s(i) = \frac{\sum_{j=1}^{c(i)} r(B(\mathrm{v}_j))}{c(i) * r(i)} \tag{2.9}$$

ahol i=1,2,…,n; n a család tagjainak száma; $c(i)$ illetve $r(i)$ az i-edik családtag belső csomópontjainak száma illetve rúdszáma; v_j jelöli a j-edik belső csomópontot (j=1,2,…,$c(i)$); és végül $r(B(v_j))$ jelöli a $B(v_j)$ befolyásolt zóna rúdszámát.

Vizsgáljuk meg, hogy az ismertetett családokban az $s(i)$ érzékenység hogyan változik az i lépésszám növekedésével, van-e határértéke, és ha igen, akkor ez mennyi. Más szóval: keressük a család „végtelenedik" tagjának érzékenységét, azaz a $\lim_{i\to\infty} s(i)$ határértéket, melyet a *tartócsalád határérzékenysége*nek nevezünk. E célból először a családok első k tagjában ($5\leq k\leq 10$) meghatároztuk a belső csomópontok befolyásolt zónáit a 2.2.7 szakasz intuitív algoritmusa alapján, kiszámoltuk az utóbbi zónák rúdszámát, majd a (2.9) képlet alapján kiszámoltuk az első k családtag geometriai érzékenységét. Ezt követően induktív következtetéssel meghatároztuk az i-edik családtag geometriai érzékenységét, majd abból a határérzékenységet. A kapott eredményeket a 2.16 és 2.17 ábrák 6-odik, 7-edik és 8-adik oszlopa tartalmazza. Látható, hogy minden vizsgált család esetén létezik a $\lim_{i\to\infty} s(i)$ határérték, és hogy ez az érték a vizsgált egyszerű családok esetén legfeljebb 0.5, ugyanakkor összetett családok esetén ennél magasabb is lehet. Sejtésünk szerint az előbbi eredmény *minden* egyszerű rácsostartó-családra fennáll, azaz:

Sejtés: Egyszerű rácsostartó-családok határérzékenysége legfeljebb 0.5, vagyis:

$$\lim_{i\to\infty} s(i) \leq \frac{1}{2}.$$

A sejtést az alábbiakban részlegesen bizonyítjuk olyan tartócsaládok esetére, amelyekben teljesül az alábbi két feltétel:

1) a belső csomópontok száma a lépésszám polinomiális függvénye (azaz $c(i)$ egy diszkrét lineáris vagy szuperlineáris polinomfüggvény)
2) a T_0 kezdeti családtag csomópontjait kivéve minden csomópont legfeljebb a csomópont keletkezését követő lépésben eléri végleges fokszámát.

(Megjegyzés: a fenti kritériumokat a 2.16 ábrán bemutatott családok mindegyike teljesíti.)

Bizonyítás:

Vizsgáljunk egy n tagú családot. Az n-edik tag érzékenysége a (2.9) képlet alapján:

$$s(n) = \frac{\sum_{j=1}^{c(n)} r\left(B(v_j)\right)}{c(n) * r(n)} \tag{2.10}$$

A számlálót jelöljük $t(n)$-nel, és próbáljunk rá felső becslést adni. Ehhez vegyük észre, hogy:

- a családban egy adott csomóponttal szomszédos csomóponthalmaz kizárólag addig bővülhet, amíg az adott csomópont fokszáma nő
- ha a családban egy adott csomópont fokszáma már nem növekszik, akkor az azt követő lépések az említett csomóponthalmaz merev magját már nem változtatják meg (hiszen minden sorozatlépés pusztán H1 műveletekből áll, melyek a változatlan csomópont-

halmazok merev magjait nem változtatják meg – legalábbis a megtámasztó rudakhoz nem csatlakozó, belső csomópontokra nézve).

- mivel egy adott lépésben egy merev mag legfeljebb annyi rudat tartalmazhat, ahány rúddal az adott lépésben a tartó rendelkezik, az előbbiből következik, hogy (a T_0 csomópontjait kivéve) minden csomópont befolyásolt zónája legfeljebb annyi rudat tartalmaz, ahány rudat a csomópont keletkezését követő lépésben létrejött tartó tartalmaz.

Figyelembe véve a fentieket és hogy az i-edik lépésben $c(i)$-$c(i$-1) belső csomópont keletkezik, illetve hogy a $2c=r$ rúdszámszabály miatt az (i+1)-edik lépésben $2c(i+1)$ rúdja van a tartónak, az alábbi következtetésekre juthatunk:

- a már a T_0 családtagban is szereplő csomópontok befolyásolt zónái akár annyi rudat is tartalmazhatnak, ahány rúd a legutolsó családtagban van, azaz akár $\{c(0) * 2c(n)\}$ számú rudat,
- az utolsó két lépésben keletkezett csomópontok befolyásolt zónái legfeljebb annyi rudat tartalmazhatnak, ahány rúd a legutolsó családtagban van, azaz $[c(n) - c(n-2)] * 2c(n)$ számú rudat,
- a maradék többi lépésben keletkezett csomópontok befolyásolt zónái legfeljebb annyi rudat tartalmazhatnak, ahány rúd a csomópont keletkezését követő lépésben létrejött családtagban van, azaz $\sum_{i=1}^{n-2}\{[c(i) - c(i-1)] * 2c(i+1)\}$ számú rudat.

Ezek alapján a család utolsó, n-edik tagjában $t(n)$-re az alábbi felső becslés adható:

$$t(n) \leq c(0) * 2c(n) + \sum_{i=1}^{n-2}\{[c(i) - c(i-1)] * 2c(i+1)\} + [c(n) - c(n-2)] * 2c(n)$$

A fenti háromtagú összeg második tagját nevezzük Q-nak, és keressünk Q-ra egy alkalmas felső korlátot. Ehhez figyeljük meg, hogy mivel c(i) az $i \geq 0$ tartományon egy lineáris vagy szuperlineáris diszkrét polinom függvény, ezért i=1,2,…,(n–2) esetén:

$$c(i+1) - c(i) < c(i+1) - c(i-1) \leq c(n) - c(n-2)$$

Ebből következően:

$$[c(i+1) - c(i)] + [c(i+1) - c(i-1)] < 2[c(n) - c(n-2)]$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy:

$$2c(i+1) < 2c(n) - 2c(n-2) + c(i) + c(i-1)$$

Q-ra tehát az alábbi felső korlát adható:

$$Q < \sum_{i=1}^{n-2}\{[c(i) - c(i-1)] * [2c(n) - 2c(n-2) + c(i) + c(i-1)]\} =$$

$$= 2[c(n) - c(n-2)] * \sum_{i=1}^{n-2}[c(i) - c(i-1)] + \sum_{i=1}^{n-2}[c^2(i) - c^2(i-1)] =$$

$$= 2[c(n) - c(n-2)][c(n-2) - c(0)] + c^2(n-2) - c^2(0)$$

A $t(n)$-re vonatkozó felső becslésünkben cseréljük ki Q-t a Q-ra vonatkozó felső korláttal, oldjuk fel a zárójeleket, majd végezzük el az egyszerűsítéseket. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$t(n) \leq 2c^2(n) - c^2(n-2) - c^2(0) + 2c(n-2)c(0)$$

Tehát az n tagú család utolsó tagjának érzékenység indexére felírható, hogy:

$$s(n) = \frac{t(n)}{2c^2(n)} \leq \frac{2c^2(n) - c^2(n-2) - c^2(0) + 2c(n-2)c(0)}{2c^2(n)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{c(n-2) - c(n)}{c(n)} + 1\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{c(0)}{c(n)}\right]^2 + \frac{c(n-2)}{c(n)} * \frac{c(0)}{c(n)}$$

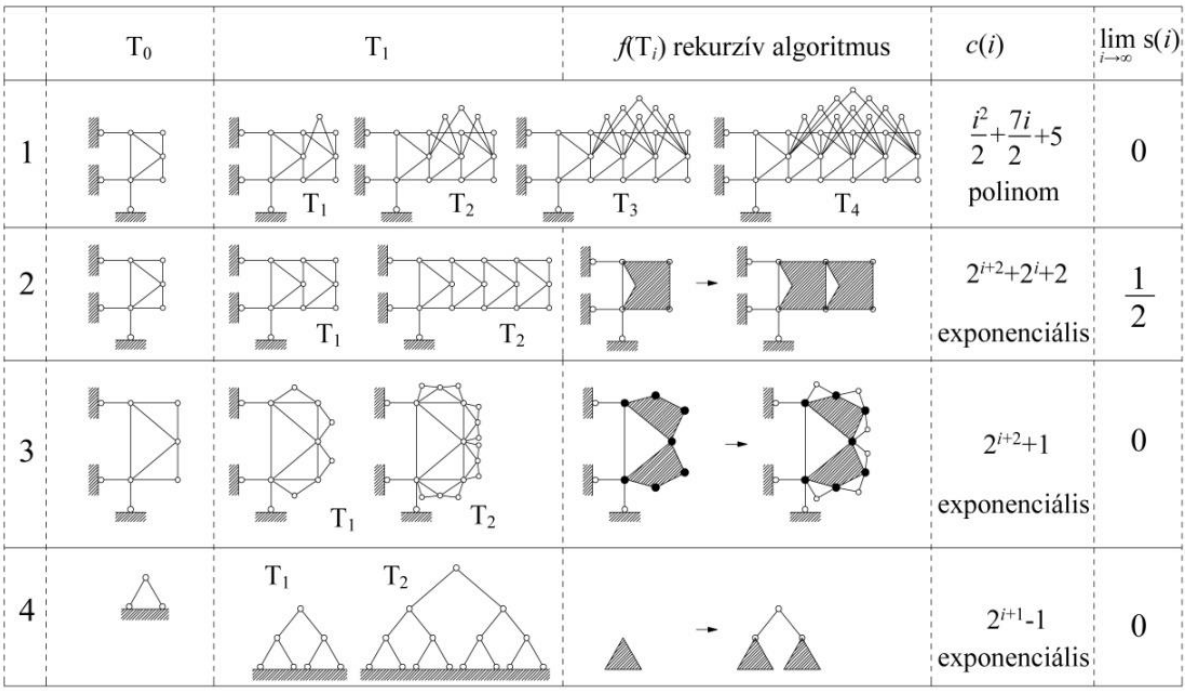
Tekintve, hogy $n \to \infty$ és $c(n)$ egy lineáris, vagy szuperlineáris polinom függvény, ezért:

$$\lim_{i \to \infty} s(i) = s(n) \leq 1 - \frac{1}{2}[0+1]^2 - \frac{1}{2}[0]^2 + \frac{c(n-2)}{c(n)} * 0 = \frac{1}{2}$$

Ezzel a sejtést bizonyítottuk a megadott feltételeket teljesítő családok esetére.

A 2.20 ábrán olyan egyszerű rácsostartó-családokat mutatunk be, amelyek nem teljesítik a fenti bizonyításban szereplő két feltételt. Figyeljük meg, hogy eme családok határérzékenysége sem haladja meg a 0,5-es értéket, tehát sejtésünket ezek a példák is alátámasztják.

Vegyük észre továbbá, hogy a sejtésünk egyben arra is következtetni enged, hogy az egyszerű rácsos tartók kevésbé érzékenyek, mint az összetett rácsos tartók.



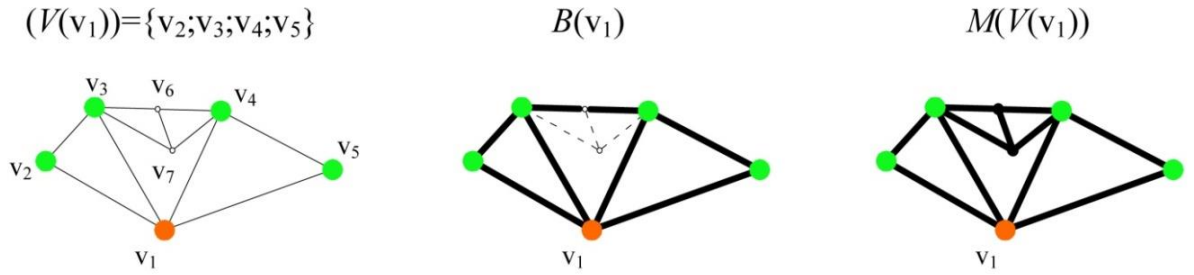
2.20 ábra. Különböző feltételeket kielégítő egyszerű rácsostartó-családok és határérzékenységük.
Az 1. számú család az 1) feltételt teljesíti, de a 2) feltételt nem. A 2. számú és 4. számú család a 2) feltételt teljesíti, de az 1) feltételt nem. A 3. számú család sem az 1) feltételt, sem a 2) feltételt nem teljesíti.

2.3.4. Mérnöki rácsos tartók, atipikus feladatok

Eddigi vizsgálatainkban kivétel nélkül *tipikus* rácsostartó-feladatokkal foglalkoztunk, azaz feltételeztük, hogy a tartók geometriája, terhei és a csomópontok megzavarásainak iránya – más szóval a metrikus bemenő adatok – tipikusak. Ebben a szakaszban azt mutatjuk meg, hogy a befolyásolt zónára illetve az érzékenységre vonatkozó állításainkban milyen változásokat okozhat, ha ezeket nem kötjük ki, azaz ha atipikus feladatokkal van dolgunk. Természetesen az aktív zónára és a sajátfeszültségi zónára vonatkozó állításainkban is változásokat okozhat, ha nem írjuk elő a feladat tipikusságát, azonban terjedelmi okokból ezt csak egyetlen példán fogjuk illusztrálni. Azt fogjuk tapasztalni, hogy ilyen atipikus esetekben az ismertetett tételeink csupán felső korlátot adnak az egyes zónákra, azaz ilyen esetekben:

- $B(\mathrm{v}_i)\in A(V(\mathrm{v}_i))$
- minimálisan merev tartók esetén: $A(V)\in M(V)$
- redundánsan merev tartók esetén: $A(V)\in M(V)\cup(\bigcup_{M(V)\cap L(\mathrm{f}_i)\neq\emptyset} L(\mathrm{f}_i))$,
  ahol $\bigcup_{M(V)\cap L(\mathrm{f}_i)\neq\emptyset} L(\mathrm{f}_i)$ jelöli azon magláncolatok unióját, amelyek rúdban metszik $M(V)$-t
- $S(\mathrm{f}_i)\in L(\mathrm{f}_i)$.

A korábbi vizsgálatainkban a *geometria* tipikussága érdekében a csomópont-koordinátákat véletlenszerűen megzavartuk, illetve „kellően általános” geometriájú szerkezeteket vizsgáltunk. A mérnökök azonban gyakran terveznek olyan rácsos tartókat, melyeknél az egy csomópontba befutó rudak között vannak párhuzamosak is, amely speciális elrendezés megváltoztathatja a befolyásolt zónát. Erre a 2.21 ábrán mutatunk egy példát: amiatt, hogy a v_3 a v_4 és a v_6 csomópontok egy egyenesre esnek, a v_1 jelű csomópont $B(\mathrm{v}_1)$ befolyásolt zónája nem egyezik meg az $M(V(\mathrm{v}_1))$ merev maggal, holott tipikus esetekben $B(\mathrm{v}_1)=M(V(\mathrm{v}_1))$ (lásd az 1. Tételt és a 2. Tételt a 2.2.2 és 2.2.3 szakaszban).

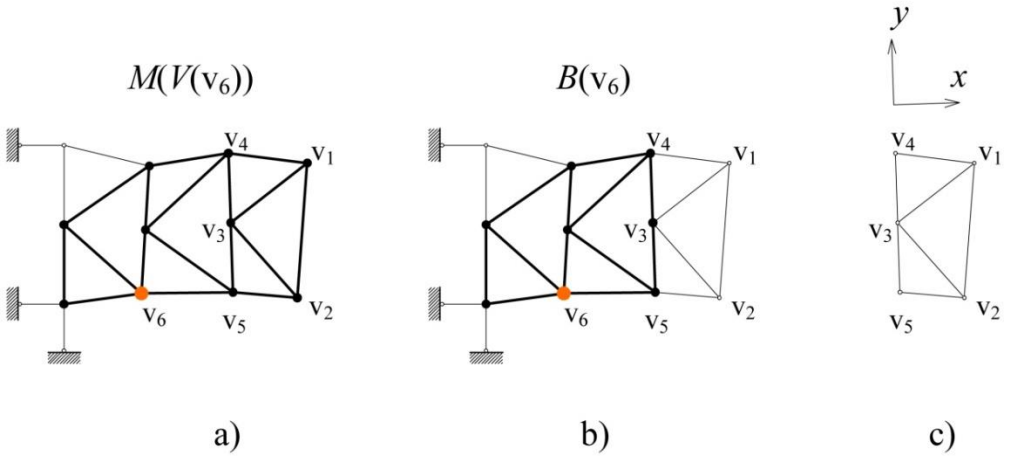


2.21 ábra. Atipikus geometria (a v_6 csomópontba befutó rudak közül kettő egy egyenesbe esik) .
Az atipikus geometria miatt a $B(\mathrm{v}_1)$ befolyásolt zóna (lásd a második ábrán kiemelt tartórészt) nem egyezik meg az $M(V(\mathrm{v}_1))$ merev maggal (lásd a harmadik ábrán kiemelt tartórészt).

Ugyanilyen viselkedést tapasztalhatunk például egy K-rácsozású tartó esetén is (2.22a-b ábra). Itt a K rácsozás szárának egyenes volta okozza a merev mag és a befolyásolt zóna eltérését. Tekintsük ugyanis a merev mag jobb oldalát kinagyítva (2.22c ábra) abban az esetben, ha nem párhuzamosak az övek. Az y tengelyt vegyük fel a rácsos tartó középétől balra eső

első K szárával párhuzamosan. A csomópontokat és a rudakat az ábrának megfelelően sorszámozva a **G** egyensúlyi mátrix bal felső 6 × 7 méretű blokkja a következő:

$$\mathbf{G_1} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1\text{-}2 & 1\text{-}3 & 1\text{-}4 & 2\text{-}3 & 2\text{-}5 & 3\text{-}4 & 3\text{-}5 \\ \hline 1x & e_{12x} & e_{13x} & e_{14x} & & & & \\ 1y & e_{12y} & e_{13y} & e_{14y} & & & & \\ 2x & -e_{12x} & & & e_{23x} & e_{25x} & & \\ 2y & -e_{12y} & & & e_{23y} & e_{25y} & & \\ 3x & & -e_{13x} & & -e_{23x} & & 0 & 0 \\ 3y & & -e_{13y} & & -e_{23y} & & 1 & -1 \end{array}$$



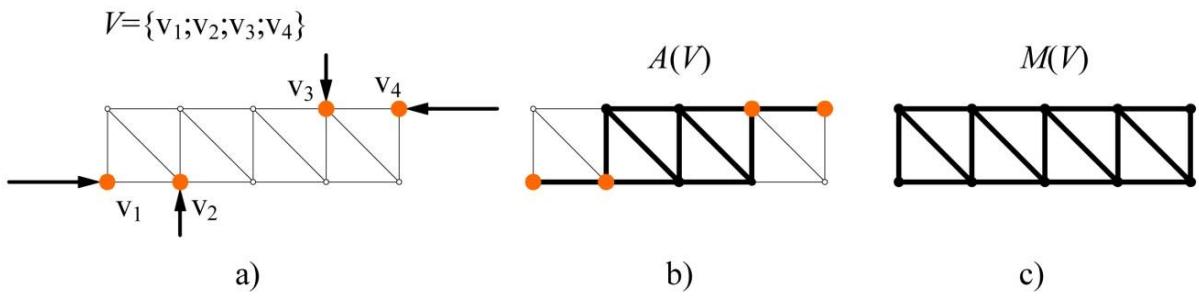
2.22 ábra. Atipikus geometria (a K-rácsozásban a „K”-k szára egyenes).
Az a) illetve b) ábrákon a v_6 jelű csomóponttal szomszédos csomóponthalmaz merev magját illetve a v_6 csomópont befolyásolt zónáját emeltük ki vastag vonalakkal és teli körökkel. A c) ábrán az előbbi merev mag egy része látható. Az $M(V(v_6))$ merev mag és a $B(v_6)$ befolyásolt zóna nem azonos.

Tekintve, hogy több rúd nem csatlakozik az első három csomóponthoz, a **G** mátrix első hat sorában nincs több nem-zérus elem, és így mivel az első öt sorban az első öt oszlopon kívül nincsenek nemzérus elemek, az első öt rúderő a többitől függetlenül számítható. Mivel az első három csomópontra ható figyelembe veendő terhek és az első 5 rúd helyzete sem változott a vizsgált csomópont helyzetének megzavarásakor, ezért ennek az 5 rúdnak a rúdereje nem változik annak ellenére, hogy a merev maghoz tartoznak. Tehát kimondhatjuk: a geometriai specialitás csökkentheti a befolyásolt zóna méretét, és ezáltal az *s* geometriai érzékenység értékét.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha nem lett volna párhuzamos a K szárának az alsó és felső része, akkor nem tudtuk volna a koordináta-rendszert úgy felvenni, hogy a $\mathbf{G_1}$ mátrix ötödik sorában a két utolsó elem egyszerre zérus legyen. Vagyis az 1-2, 1-3, 1-4, 2-3 és 2-5 rudakban ébredő rúderők nem lennének meghatározhatók a többi egyenlet nélkül, ezért az $M(V(v_6))$ merev mag és a $B(v_6)$ befolyásolt zóna megegyezne.

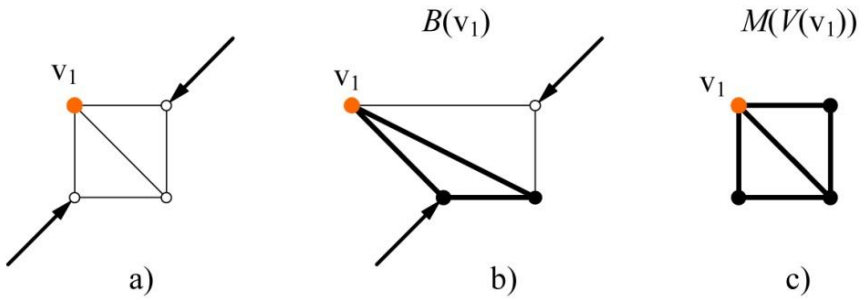
Előírtuk, hogy a *teher*nek is tipikusnak kell lennie. A mérnök által tervezett tartókban azonban igen gyakran találunk olyan csomópontokat, amelyeknél a külső csomóponti erő egy egyenesbe esik az adott csomópontba befutó rudak egyikével. Ez a speciális teher-elrendezés

azt idézheti elő, hogy a 2. Tétel nem teljesül, azaz $A(V)$ aktív zóna nem azonos $M(V)$ merev maggal. Egy ilyen példát szemléltetünk a 2.23 ábrán. A tartó V csomóponthalmazán működtetünk egy speciális, egyensúlyi terhet (2.23a ábra). A 2. Tétel alapján azt várnánk, hogy ennek hatására a c) ábrán látható $M(V)$ merev mag rúdhalmazában ébrednek rúderők. Ennek ellenére a teher csupán az $M(V)$ egy részhalmazában, a 2.23b ábrán kiemelt rudakban idéz elő erőt. Tehát a speciális teher csökkentheti az aktív zóna méretét.



2.23 ábra. Atipikus teher.
Az a) ábrán láthatót a V csomóponthalmazon terheljük egy egyensúlyi erőrendszerrel. Az $A(V)$ aktív zóna a b) ábrán kiemelt tartórész lesz, amely eltér a c) ábrán látható $M(V)$ merev magtól.

Korábban előírtuk azt is, hogy a vizsgált csomópont geometriai *megzavarás*ának is tipikusnak kell lennie. Ennek az előírásnak a szükségességét beláthatjuk, ha a vizsgált v_i jelű csomópontot az eredeti helyzet körül egy kis körön körbevezetjük, és az itt elfoglalt helyzet függvényében ábrázoljuk az $M(V(v_i))$ merev mag egyik rúdjában keletkező rúderő változását. Ez egy folytonos függvény. Ha valamelyik rúd esetén e függvénynek van pozitív és negatív értéke is, akkor speciális esetben zérusnak is kell lennie, és ekkor a $B(v_i)$ befolyásolt zóna az $M(V(v_i))$ merev magnál kisebb. Erre mutatunk egy példát a 2.24 ábrán. Ha a v_1 csomópont helyzetét vízszintes irányban módosítjuk (2.24a-b ábra), akkor ennek hatására a vastag vonallal jelzett rudakban változik meg a rúderő, vagyis azt kaptuk, hogy a v_1 csomópont $B(v_1)$ befolyásolt zónája nem azonos az $M(V(v_1))$ merev maggal (lásd a 2.24c ábrát), holott tipikus esetben meg kellene egyezniük. Tehát a speciális zavarási irány is csökkentheti s értékét.



2.24 ábra. Atipikus mozgatási irány.
Az a) ábrán látható tartó v_1 jelű csomópontjának koordinátáját vízszintes irányban megzavarva a (b) ábrán kiemelt tartórész lesz a $B(v_1)$ befolyásolt zóna, amely eltér a c) ábrán látható $M(V(v_1))$ merev magtól. Vegyük észre továbbá, hogy a (b) ábrán kiemelt $B(v_1)$ befolyásolt zóna eltér az $A(V(v_1))$ aktív zónától is, amely c) ábrán látható merev maggal egyezik meg.

A geometria és a teher speciális elrendezése tehát igen gyakran atipikussá teszik a feladatot csökkentve ezzel az érzékenységet. Minthogy a mérnökök előszeretettel terveznek ilyen, speciális tulajdonságú rácsos tartókat, ezért a mérnöki rácsos tartók általában kevésbé érzékenyek, mint egy azonos topológiájú, véletlenszerű geometriával konstruált tartó.

2.4. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK: 1. ÉS 2. TÉZIS

1. Tézis[1]

(Tóth, Domokos és Gáspár 2009; Tóth 2011; Tóth 2012)

[1] A *-gal jelölt állítások egy másik, a jelen értekezésben ismertetettől eltérő, annál részletesebb, matematikai nyelvezetű és szemléletű bizonyítása a *(Jordán, Domokos, Tóth 2013)*-ban található.

Bemutattam, hogy síkbeli, tipikus rácsostartó-feladatok esetén a befolyásolt zóna kijelölhető erőtani számítások nélkül is, önmagában a tartó topológiáját leíró gráf alapján:

1.1. Bevezettem egy *csomóponthalmaz merev mag*ja fogalmát, mely a minimálisan merev rácsos tartónak az adott csomóponthalmazt tartalmazó, legkevesebb rúddal rendelkező, összefüggő, minimálisan merev része.

1.2. Kimutattam, hogy minimálisan merev szerkezet esetén egy adott csomópont befolyásolt zónája azonos az ugyanazon csomóponttal szomszédos csomóponthalmaz merev magjával*.

1.3. A redundánsan merev esetet, az erőmódszer gondolatmenetére támaszkodva, visszavezettem a minimálisan merev tartókra: bemutattam, hogy ilyen esetben a befolyásolt zónát több alkalmasan kijelölt merev mag egyesítésével képzett halmaz alkotja*.

1.4. Algoritmusokat mutattam arra, hogy miként jelölhető ki pusztán a tartó gráfmodellje ismeretében a merev mag, a befolyásolt zóna, a külső teher hatására aktív rudak halmaza, valamint a tartó sajátfeszültségi állapotában aktív rudak halmaza.

1.5. A merev mag fogalmának segítségével a rúdpótlás végrehajtásának új, (szükséges és egyben elégséges) kombinatorikai feltételét adtam tipikus rácsos tartó feladatok esetére.

2. Tézis

(Tóth és Domokos 2009; Tóth, Domokos és Gáspár 2009; Tóth 2011; Tóth 2012; Jordán, Domokos és Tóth 2013)

Definiáltam a rácsos tartók *geometriai érzékenység index*ét (röviden érzékenységét). Ennek alapján példákat mutattam minimális illetve maximális érzékenységű minimálisan merev rácsostartó-típusokra, továbbá mutattam két olyan tényezőt, melyekkel az érzékenység növelhető illetve csökkenthető:

2.1. Megmutattam, hogy a fölös rudak számának (azaz a statikai határozatlanság fokának) növelése az érzékenység monoton növekedését idézi elő.

2.2. Rámutattam, hogy a mérnöki gyakorlatban elterjedt rácsostartó-geometriák érzékenysége egy azonos topológiájú, véletlenszerű geometriával konstruált tartó érzékenységénél kisebb vagy legfeljebb egyenlő azzal.

Rekurzív bővítési lépéssel képzett rácsostartó-családok érzékenységét vizsgáltam a lépésszám függvényében. Ennek keretében:

2.3. Igazoltam, hogy amennyiben a rekurzív bővítés csak Henneberg 1-es típusú elemekből áll, és a bővítés üteme a lépésszám polinomiális függvénye, valamint (a kezdeti családtag csomópontjait kivéve) minden csomópont legfeljebb a csomópont keletkezését követő lépésben eléri végleges fokszámát, akkor az érzékenység határértéke (ahogy a lépésszám a végtelenhez tart) legfeljebb 0.5.

3

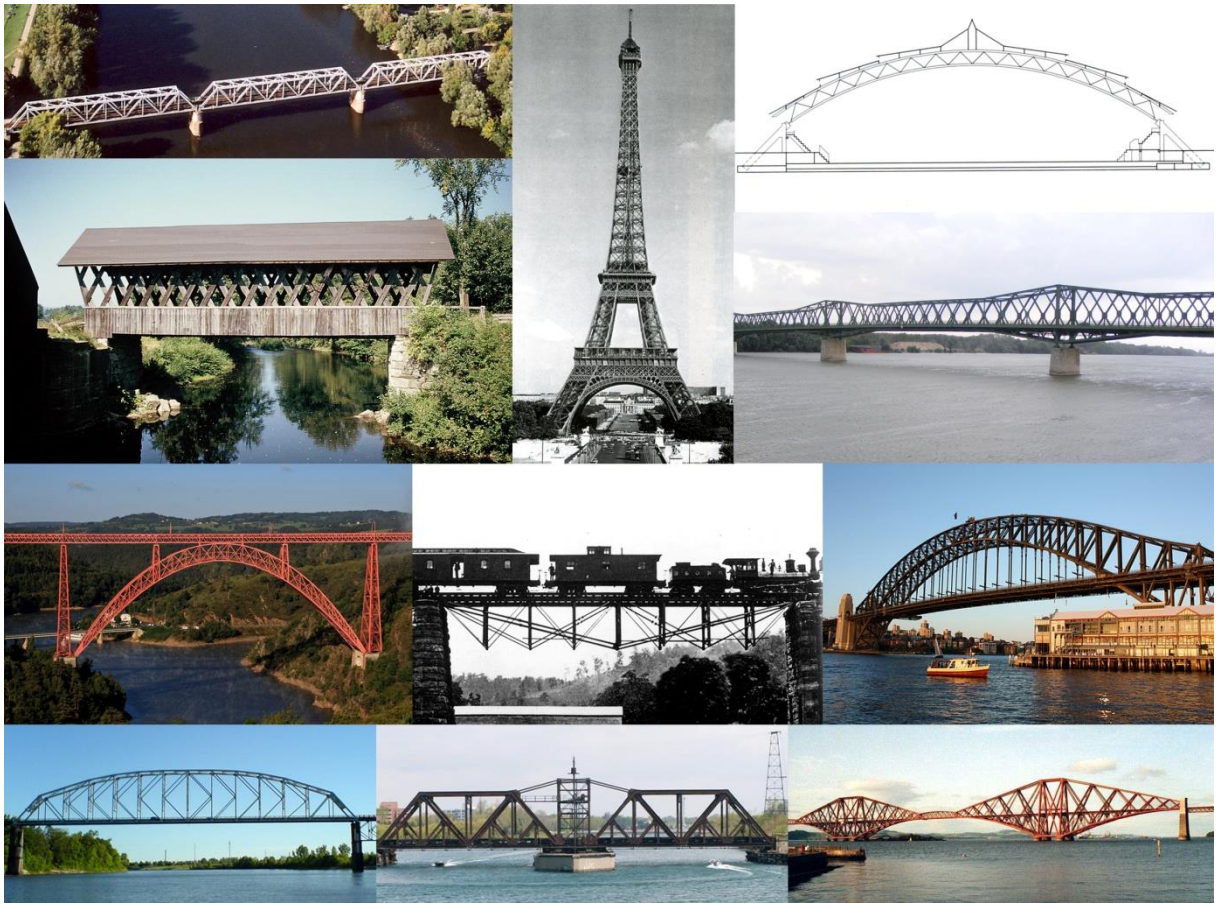
TÖKÉLETLENÜL SZIMMETRIKUS, OPTIMÁLIS RÁCSOS TARTÓK

Ha egy csomópont helyzetét egy szimmetrikus rácsos tartóban zavarjuk meg, akkor *tökéletlenül szimmetrikus* (más néven *kissé aszimmetrikus*) tartót kapunk. Ebben a fejezetben korábbi munkákra támaszkodva *(Várkonyi és Domokos 2006; Várkonyi és Domokos 2007)* azt vizsgáljuk, hogy vajon javítható-e a síkbeli, statikailag határozott tükörszimmetrikus rácsos tartók viselkedése kis geometriai zavarással, azaz léteznek-e kissé aszimmetrikus, optimális rácsos tartók.

A jelen fejezetben tárgyalt, elért eredményeket a *(Tóth, Domokos és Várkonyi 2007; Tóth és Domokos 2008)* munkákban publikáltuk.

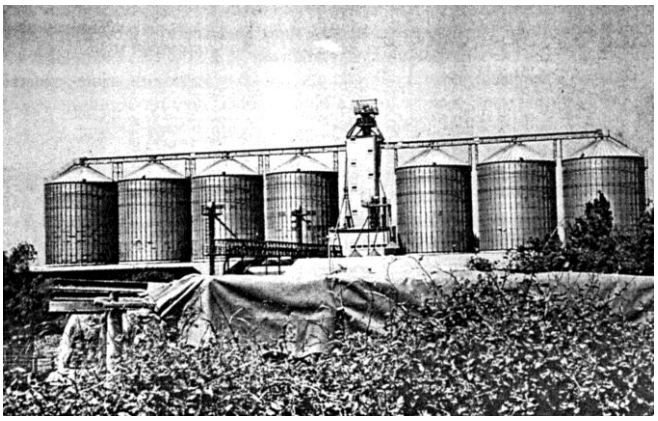
3.1. MOTÍVÁCIÓ, ELŐZMÉNYEK, KUTATÁSI CÉL

A mérnöki szerkezetek gyakran rendelkeznek bizonyos mértékű szimmetriával, a rácsos tartók között különösen a tükörszimmetria gyakori (lásd a 3.1 ábrát). A szimmetriának egyrészt alapvető logikai értelme van – hiszen a legkézenfekvőbb módon egyszerűsíti a tervezési, gyártási és kivitelezési folyamatokat –, másrészt a szimmetria az egyensúlyi követelményeknek is egy alapvető állapota *(Kollár és Vámossy 1996)*. A szerkezettervezők számára tehát a szimmetria szinte alapvető követelmény, és úgy tűnik, hogy a mérnökök nézete szerint egyben optimális is – legalább lokálisan.



3.1. ábra Tükörszimmetrikus rácsos tartók.

A szerkezettervezők kis aszimmetriától való idegenkedése azonban nem csak racionális okokkal magyarázható. Egy, a mérnöki szerkezetek esztétikájának tanulmányozásával foglalkozó könyv *(Kollár és Vámossy 1996)* megállapítása szerint a gyenge aszimmetria (ahol az elrendezés „majdnem szimmetrikus”) kellemetlen látványt nyújt, mert nem karakteres és nehezen értelmezhető (lásd a 3.2 ábrát). A mérnöki problémáknál tehát a kicsit aszimmetrikus szerkezetek kevésbé népszerű, tökéletlen megoldásoknak számítanak.



3.2. ábra. Nem karakteres aszimmetriájú silócsoport. Forrás: *(Kollár és Vámossy 1996)*

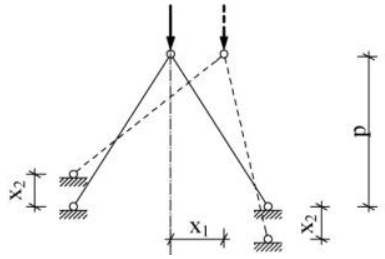
Ezzel szemben a természetben nagy számban fordulnak elő kissé aszimmetrikus teremtmények: ilyen például az alapvetően tükörszimmetrikus felépítésű emberi test is *(Hámori 1999)*, amely figyelemre méltó tárháza a kis aszimmetriáknak: gondoljunk például a szív elhelyezkedésére vagy az agy két aszimmetrikus félteké jére.

A természeti példák alapján felmerül a kérdés, hogy vajon létezhetnek-e a szerkezettervezésben is kissé aszimmetrikus, optimális szerkezeti megoldások. Az erre irányuló szerkezeti vizsgálatok során azt lehet feltárni, hogy az adott szerkezet esetén a szimmetrikus konfiguráció vajon lokálisan 'pesszimum' vagy optimum-e, azaz lehet-e javítani rajta kis zavarásokkal, és ha igen, akkor milyen feltételekkel. Ezt a kérdést Várkonyi és Domokos *(2006; 2007)* átfogóan és általánosan tanulmányozta. A jelen fejezetben ugyanezt a kérdést speciálisan a statikailag határozott tükörszimmetrikus rácsos tartók esetére vizsgálom meg. Tekintve, hogy eredményeim Várkonyi és Domokos *(2006; 2007)* munkáira épülnek, a következőkben rövid áttekintést adok azokról, majd bemutatom az azokkal való kapcsolódási pontokat.

A *(Várkonyi és Domokos 2006)* a tükörszimmetrikus szerkezetek egyetlen geometriai paraméterrel leírható családjaiban létrejövő, tökéletlenül szimmetrikus szerkezeti optimumokról számolt be (például a 3.3 ábrán a geometriai paraméter a p-vel jelzett tartómagasság). Ebben azt vetítik előre, hogy ha csak egyetlen szimmetriasértő geometriai változót (x_1) engedünk meg (úgy, hogy az x_1-et –1-szeresére változtatva az eredeti tartó tükörképét kapjuk, lásd például a 3.4a ábrát), akkor a tökéletesen szimmetrikus (x_1=0) konfiguráció tipikusan optimális, és egyben a tökéletlenül szimmetrikus szerkezeti optimumok ($|x_1|<<1$) atipikusak a mérnöki optimálási problémák nagy hányadában (lásd a *lokális optimáló kritérium*ot a 3.2 fejezetpontban). Más szóval: a tükörszimmetrikus szerkezetek viselkedése tipikusan nem javítható a szimmetrikus geometria kis megzavarásával. Ez összhangban van a mérnökök alapvető intuíciójával, mely szerint a szimmetrikus elrendezésű szerkezetek optimálisak.

Habár az aszimmetrikus optimumok ritkák, mégis léteznek. Várkonyi és Domokos *(2006)* olyan *osztályozási rendszer*t adott, melynek alapja az optimálási feladathoz tartozó célfüggvény x_1=0 helyen való lokális viselkedése. Vizsgálataikban az 5 fő matematikai esetet tárgyalva bemutatták az optimumok fajtáit.

Ezeket az eredményeket Várkonyi és Domokos *(2007)* később általánosította azáltal, hogy egyetlen x_1 változó helyett tetszőleges számú x_i szimmetriasértő változót (lásd például a 3.3 ábrát), illetve tükörszimmetria helyett tetszőleges, véges szimmetria-csoportokat vizsgált. Ebben többek között megállapították, hogy kétváltozós esetben már nem igaz, hogy a szimmetrikus konfiguráció tipikusan optimális, vagyis ilyen esetekben nagyobb eséllyel lehet kissé aszimmetrikus optimumot találni, mint az egyváltozós esetben.



3.3. ábra. Példa a két (x_1 és x_2) szimmetriasértő-változós esetre.

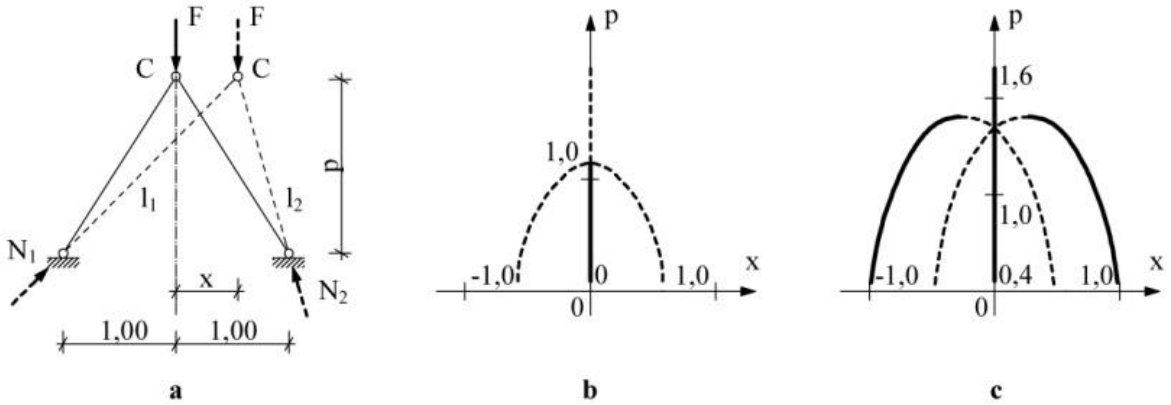
Dolgozatomban tükörszimmetrikus geometriájú és terhelésű, statikailag határozott tartók egyparaméteres családjaiban foglalkozom az egyváltozós esettel. Célom megvizsgálni, hogy az ilyen szerkezetek is alátámasztják-e a mérnöki intuíciót és Várkonyi és Domokos *(2006)* eredményeit, és hogy azok besorolhatók-e a Várkonyi és Domokos *(2006)* féle osztályozás főbb eseteibe.

A fejezet felépítése a következő. Először ismertetek két, alapjaiban eltérő optimáló célfüggvénytípust, és rövid áttekintést adok a Várkonyi és Domokos *(2006)* féle lokális osztályozásról. Majd a 'lokális' kritériumhoz tartozó célfüggvénytípust alkalmazom rácsos tartókra és bemutatom a statikailag határozott rácsos tartókra jellemző, neutrális szerkezeti viselkedést. Végül rámutatok a tapasztalt viselkedés okára, valamint annak következményére.

3.2. GLOBÁLIS ÉS LOKÁLIS OPTIMÁLÓ KRITÉRIUM

A lokális és a globális optimáló kritérium ismertetését a *(Várkonyi és Domokos 2006; 2007)*-ből vesszük át.

Csakúgy, mint számos optimálási feladatban, az optimumot egy *célfüggvény* minimumával kapcsoljuk össze: egy skalár $U(x,p)$ célfüggvényt rendelünk a rácsos tartóhoz, és keressük az U célfüggvény x szerinti lokális minimumát, mint a rácsos tartó optimális geometriáját. Az x szimmetriasértő változó a szimmetrikus konfigurációtól való eltérést jelzi, vagyis az x=0 eset mindig a szimmetrikus tartóhoz tartozik, továbbá az x-et –1-szeresére változtatva az eredeti tartó tükörképét kapjuk (3.4a ábra). A p paraméter a tartó egy jellemző geometriai méretét jelöli (rácsos tartók esetén ez jellemzően a tartó magassága), így p olyan (folytonos) *rácsos-tartó-család*okat ír le, melyek közül mindegyik szimmetrikus x=0 esetén (3.4a ábra). Célunk megkeresni az *optimum-bifurkációs diagramok*at az [x,p] síkban, melyek leírják, hogy az optimum (azaz a célfüggvény minimuma) miként alakul a p paraméter változtatásával. Az optimum-bifurkációs diagram értelmezéséhez segítséget nyújt a 3.5 ábra.



3.4. ábra. Háromcsuklós rácsos tartó és optimum-bifurkációs diagramjai.
(a) Háromcsuklós rácsos tartó: a C csukló vízszintes, illetve függőleges helyzetét az x szimmetriasértő változó, illetve a p geometriai paraméter jelöli. (b) Globális kritérium esetén egy klasszikus, vasvilla-típusú optimum-bifurkációs diagramot kapunk. (c) Lokális kritérium esetén nem szokványos („X"-típusú) optimum-bifurkációs diagram az eredmény. (A (b) és (c) ábrán az optimumokat folytonos, a pesszimumokat szaggatott vonal jelöli.)

Az optimáló kritériumok bemutatásához példaként tekintsük a 3.4a ábrán látható síkbeli háromcsuklós rácsos tartót, amit F függőleges erő terhel. A tartóban rudak hosszát l_i, a rudak keresztmetszet-területét A_i, a hajlító merevségüket EI_i jelöli (i=1,2). A C csomópont vízszintes helyzetét az x változó, míg függőleges helyzetét a p geometriai paraméter jelöli. Jelölje N_1 és N_2 a belső rúderőket, az N_1^{cr} és az N_2^{cr} a kritikus (Euler) terheket. Ekkor az egyes rudak f_i *kihajlással szembeni kockázata* az alábbi képlettel számítható:

$$f_i\,(x,p) = \frac{N_i(x,p)}{N_i^{cr}(x,p)} = \frac{N_i(x,p)l_i^{\,2}(x,p)}{EI_i\pi^2} \tag{3.1}$$

Mindkét alább bemutatott optimáló kritérium során feltesszük, hogy a rudak keresztmetszete állandó a rúdhossz mentén.

A *globális optimáló kritérium* esetén a tartó teljes tömegét (térfogatát) kívánjuk minimalizálni, vagyis a célfüggvényünk $U(x,p)=A_1l_1+A_2l_2$ alakú, ennek keressük a minimumát, és közben előírjuk, hogy a kihajlási kockázat minden rúdban legyen azonos, azaz: $f_1=f_2$. Az $A_1\neq A_2$ keresztmetszet-területeteket ennek a feltételnek megfelelően határozzuk meg, tehát a rudakat egyedileg optimalizáljuk. Feltesszük továbbá, hogy adott tartón belül minden rúd keresztmetszete egy (tetszőlegesen választott) etalon keresztmetszet arányos nagyításával vagy kicsinyítésével áll elő. Ennek a kritériumnak a háromcsuklós tartón való alkalmazása esetén egy klasszikus *vasvilla* optimum-bifurkációt kapunk (3.4b ábra). Ahogy arra Várkonyi és Domokos *(2006)* rámutatott, ez nem meglepő. Tekintve, hogy U egy sima, szimmetrikus függvény (azaz $U(x,p)=U(-x,p)$), az x=0 helyen U-nak vagy lokális minimuma, vagy lokális maximuma van, ahogyan azt az elemi katasztrófaelmélet is előrevetíti *(Poston és Stewart, 1978)*, és így az $U(0;p)$ függvény típusa tipikusan vasvilla elágazásban változik meg.

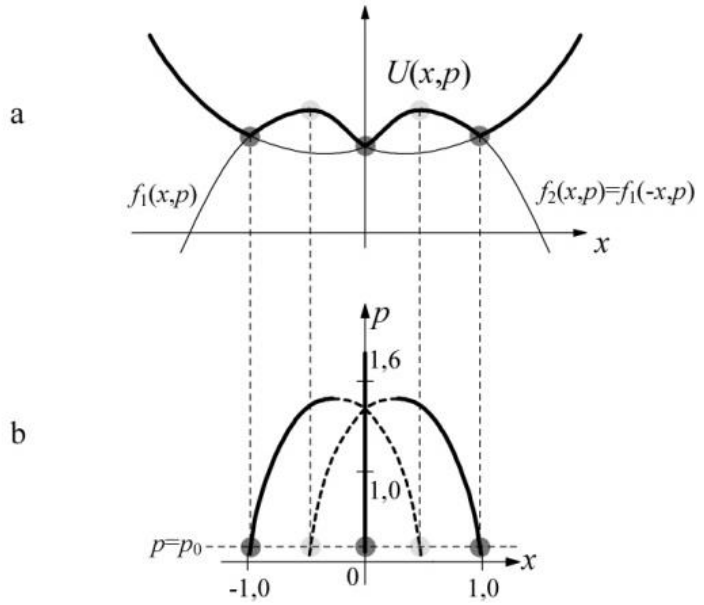
Most a *lokális optimáló kritériumra* is mutatunk példát. A mérnökök előszeretettel terveznek azonos tulajdonságú szerkezeti elemekből álló tartókat: rácsos tartók konstruálása esetén például azonos keresztmetszetű és anyagú rudakat használnak. Követve ezt a felfogást, most azt írjuk elő, hogy $A_1=A_2$, $I_1=I_2$, aminek eredményeképpen $f_1\neq f_2$. Célunk most a kihajlás kockázatát minimalizálni, tehát a legnagyobb kockázatú rúd kockázatát figyeljük. Ekkor az $U(x,p)$ célfüggvényünk az f_i kockázatokat leíró függvények felső burkológörbéje lesz, azaz:

$$U(x,p) = \max\,(f_1(x,p), f_2(x,p)) \tag{3.2}$$

Ezt a kritériumot *lokális*nak nevezzük, mert a szerkezet lokális, *gyenge pont*jait (esetünkben a rudakat) egyenként vizsgálja. Ez a megközelítés valószínűleg jóval közelebb áll a mérnökökhöz, mint a globális kritériumhoz tartozó megközelítés.

Vegyük észre, hogy $f_2(x,p)=f_1(-x,p)$, azaz f_2 és f_1 egymás tükörképei (lásd a 3.5a ábrát); az előbbit a feladat *generáló függvény*ének fogjuk nevezni. Figyeljük meg, hogy míg a generáló függvény sima, addig az f_1 és f_2 felső burkológörbéjeként előálló $U(x,p)$ célfüggvény már nem az. Könnyen belátható, hogy $U(x,p)$-nek majdnem minden p érték esetén egy (nem-sima) lokális minimuma van az x=0 helyen (3.5a ábra), így ez az egyszerű példa azt *sejteti*, hogy a mérnöki szerkezetek esetén a szimmetrikus konfigurációk robosztus (nem-sima) optimumok. Ha a vizsgált háromcsuklós tartónkon ezt a kritériumot alkalmazzuk, az optimum-bifurkációs

diagram egy nem szokványos ’X-elágazás’-t mutat (3.4c ábra). Vegyük észre, hogy az x=0 lokális optimum marad a bifurkációs pont mindkét oldalán. Eme nem várt eredmény oka az, hogy U egy speciális függvény: az x=0 helyen tipikusan nem-sima lokális optimuma van, ami nem tűnik el a bifurkációs pontokban.



3.5. ábra. Az $U(x,p)$ célfüggvény és a bifurkációs diagram kapcsolata.
(a) A vastag vonal az $U(x,p)$ célfüggvényt ábrázolja a $p=p_0$ pontban: a nem-sima $U(x,p)$ a sima, tükrözött $f_1(x,p)$ generáló függvény felső burkológörbéjeként áll elő. (b) Bifurkációs diagram az $[x,p]$ síkon: az $U(x,p)$ függvény lokális minimumaihoz, illetve lokális maximumaihoz a bifurkációs diagramban optimum (folytonos vonal), illetve pesszimum (szaggatott vonal) tartozik.

Várkonyi és Domokos *(2006)* a (3.2)-ben definiált, egyváltozós, nem-sima, tükrözött célfüggvényekhez tartozó optimum-bifurkációs diagramok típusait tanulmányozta egyparaméteres szerkezetcsaládokban: osztályozták azok kritikus pontjait, megállapították a tipikus optimum-elágazások jellegét, bemutatva, hogy azok nem egyeznek a sima célfüggvényeknél ismert típusokkal, valamint minden elágazástípushoz mutattak szerkezeti példát.

3.3. LOKÁLIS OSZTÁLYOZÁS: TIPIKUS ESETEK ÉS NEUTRÁLIS VISELKEDÉS

A jelen szakaszban vázlatosan ismertetjük a Várkonyi és Domokos-féle lokális osztályozást *(Várkonyi és Domokos 2006, Várkonyi 2006)*, majd bemutatjuk az ebben az osztályozásban degenerált esetnek minősülő *neutrális viselkedés*t.

Várkonyi és Domokos *(2006)* a klasszikus katasztrófa elméletet alkalmazta a tükörszimmetrikus mérnöki szerkezetek optimalizálásának modellezése céljából: az $f(x,p)$ sima generáló függvény Taylor-sorát vizsgálták az x=0 pontban, és ez alapján osztályozták a tükrözött $U(x,p)$ célfüggvényekhez tartozó optimum-bifurkációs diagramok kritikus pontjait.

Egy *sima* $f(x)$ függvény *kritikus pont*jai azok a pontok, ahol az $f(x)$ első deriváltja zérus, azaz ahol $f'(x)=0$. A tükrözött $U(x,p)$ célfüggvények azonban nem-sima függvények, ezért az osztályozás során a kritikus pontok következő, általánosabb megfogalmazására volt szükség. Kritikusnak nevezünk egy pontot, ha ott az intervallum-derivált elemei között szerepel a 0. Az intervallum-derivált egy $[U'(x_i-0,p),\ U'(x_i+0,p)]$ intervallum (lásd például a *(Korn és Korn 1986)*-ot). Például az $f(x)=|x|$ intervallum-deriváltja az $x=0$ helyen a [-1,1] intervallum.

A nem-sima U célfüggvények lokális (azaz az $x=0$ pontban vizsgált) osztályozását Várkonyi és Domokos *(2006)* visszavezette a sima f generáló függvény lokális osztályozására. Egy sima függvény lokális osztályozását az határozza meg, hogy a függvény Taylor-sorában melyik a legkisebb kitevőjű, nem-zérus tag *(Poston és Stewart 1978)*. (Megjegyzés: a Taylor-sor konstans tagja nem befolyásolja az eredményt, ezért ebből a szempontból figyelmen kívül hagyható).

A lokális osztályozás *tipikus* eseteit és a kapcsolódó optimum-elágazások jellegét a *(Várkonyi és Domokos 2006)* részletesen tárgyalta, ezért ezekről itt csak vázlatosan teszünk említést. A p tengely egy általános p_0 pontjában (azaz ahol $x=0$) az $f(x,p)$ függvény Taylor-sorának lineáris tagja tipikusan nem tűnik el; ugyanakkor tipikusan létezik néhány véges számú, izolált pont az $x=0$ tengely mentén, ahol a lineáris tag eltűnik, de a négyzetes tag nem; illetve tipikusan nem létezik olyan pont, ahol a lineáris és a kvadratikus tag egyszerre tűnik el. Várkonyi és Domokos *(2006)* azt találta, hogy eme említett tipikus esetekben az optimum nem ágazik el, vagyis az $x=0$ pont lokálisan mindig (p bármilyen értékénél) optimum marad (lásd például a 3.4c ábrát), azaz kissé aszimmetrikus optimumok tipikus esetekben nem léteznek.

Most bemutatunk egy Várkonyi és Domokos *(2006)* által nem vizsgált, az említett lokális osztályozás alapján atipikus esetnek számító *neutrális viselkedés*t. Tekintsük azt az esetet, amikor az $f(x,p)$ függvény Taylor-sorának összes (nem-konstans) tagja eltűnik, azaz:

$$f(x,p) = \text{konstans} \tag{3.3}$$

Ez az eset matematikai szempontból abszolút degenerált, ugyanakkor – ahogy arra később rá fogunk mutatni – nem ritka statikailag határozott rácsos tartók esetén. A (3.3)-as esetet *neutrális viselkedés*nek hívjuk.

Vegyük észre, hogy *rácsos tartók* esetén a lokális optimálási kritériumhoz tartozó célfüggvény – melyet jelöljünk $\hat{U}(x,p)$-vel – több $U_i(x,p)$ tükrözött függvény burkológörbéjeként áll elő (hiszen rendszerint kettőnél több rúd kihajlási kockázatát kell egyszerre vizsgálnunk), vagyis:

$$\hat{U}(x,p) = \max(U_i(x,p)) \qquad i=1,2,\ldots,n, \tag{3.4}$$

ahol az $U_i(x,p)$ a (3.2) szerint definiált függvényeket jelöli, n a tartó rúdjainak száma.

Várkonyi és Domokos *(2006)* bemutatta, hogy eme $\hat{U}(x,p)$ célfüggvények esetén a tipikus optimum-bifurkációk ugyanazok, mint az általuk részletesen vizsgált, egyetlen tükrözött generáló függvényből előálló $U(x,p)$ célfüggvények esetén: az $\hat{U}$ bifurkációinak halmaza rész-

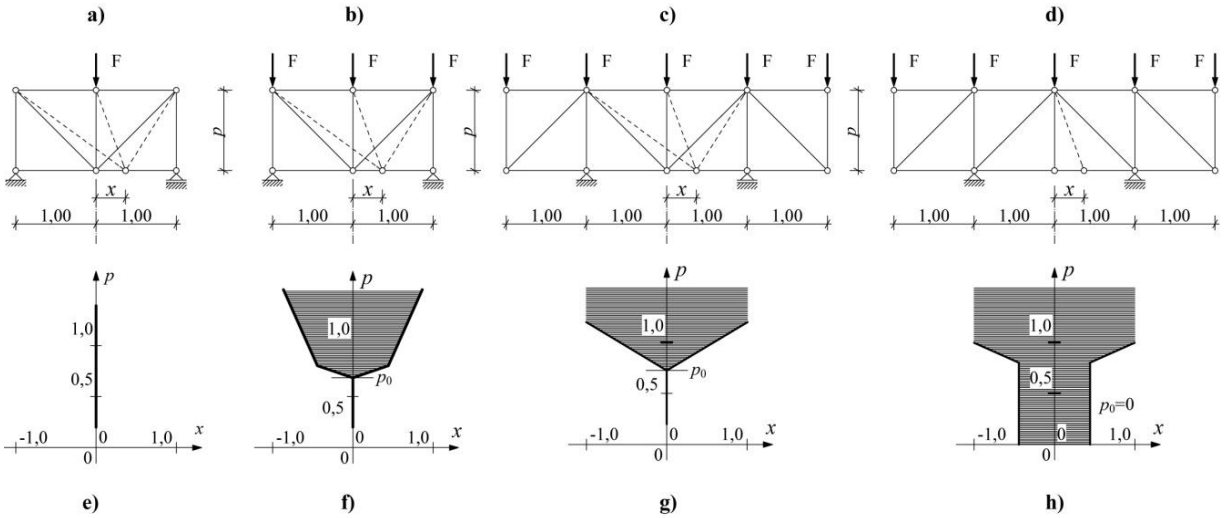
halmaza az egyes U_i függvények bifurkációi halmazának. Az $(x,p)=(0,p_0)$ pontban egy adott U_k elágazása akkor jelenik meg az $\hat{U}$ célfüggvényben, ha az adott pontban fennáll, hogy:

$$U_k(0,p_0) = \max\,(U_i\,(0,\,p_0)) \tag{3.5}$$

3.4. PÉLDÁK NEUTRÁLIS VISELKEDÉSRE

A jelen szakaszban a *lokális* optimáló kritériumot alkalmazzuk statikailag határozott tükörszimmetrikus rácsos tartókra, és ismertetjük ezzel kapcsolatos vizsgálati eredményeinket.

A tükörszimmetrikus tartók esetén az a legkézenfekvőbb, ha az x szimmetriasértő változónak egy, a szimmetria tengelyben lévő csomópont vízszintes elmozdulását választjuk (3.6a-d ábrák). Természetesen ez a megközelítés könnyedén általánosítható jóval általánosabbakra – például illetve egyszerre több, szimmetrikus csomópontpár helyzetét is módosíthatjuk.



3.6. ábra. Statikailag határozott rácsos tartók (a-d) és a hozzájuk tartozó optimum-bifurkációs diagramok (e-h). (Az a) és a b) eset csak a terhelésben tér el egymástól.)

Mindegyik esetben az alsó, középső csomópont vízszintes elmozdulása okozza a szimmetriasértést. (a) és (e) ábra: Figyeljük meg, hogy nem történik optimum elágazás, és hogy a szimmetrikus elrendezés optimális marad minden p érték esetén. (b) és (f) ábra valamint (c) és (g) ábra: Figyeljük meg a neutrális tartományt a p_0 kritikus paraméterérték felett. (d) és (h): Figyeljük meg, hogy a neutrális tartomány már a p_0=0 érték felett elkezdődik. (Az optimumot folytonos vonal, a neutrális helyzeteket a vonalkázott területek jelzik.)
(Vegyük észre: az a) és a b) rácsos tartó feladat csupán az alkalmazott teher szempontjából tér el egymástól.)

Amint azt már említettük, a rácsos tartók tipikus példái az olyan, többszörösen tükrözött, a (3.4)-es típusú célfüggvényeknek, ahol a generáló függvényeket az egyes, kihajlással szembeni kockázatok alapján kapjuk (lásd a (3.1) kifejezést). Minden ilyen esetben azt figyelhetjük meg, hogy statikailag határozott tartókban néhány csomópont helyzetének megváltoztatása a rúderők egy lényeges hányadát – és így a generáló függvények egy lényeges hányadát – nem befolyásolja. Mivel az U célfüggvény a generáló függvények felső burkológörbéje, jó esély

van arra, hogy a csomóponti mozgatás az U-ra sem lesz hatással, azaz (3.3)-as típusú neutrális viselkedést tapasztalunk.

Neutrális viselkedést mutatnak például a 3.6b, 3.6c és a 3.6d ábrán látható rácsos tartók – a hozzájuk tartozó optimum bifurkációs diagramokat a 3.6f, 3.6g és 3.6h ábrákon ábrázoltuk. Figyeljük meg a középső, bevonalkázott területet, amely a degenerált szerkezeti optimumok folytonos spektrumát jelöli. A kritikus p_0 érték alatt a szimmetrikus konfiguráció az optimális, míg fölötte az optimális viselkedés az x egy folytonos szakaszához tartozik. A p paraméter bizonyos értéke felett tehát *folytonos* aszimmetrikus optimum-családok jönnek létre a rögzített paraméterpontokban. Erre a neutrális viselkedésre intuitív magyarázat is adható, ha figyelembe vesszük, hogy (megfelelően nagy p értékek esetén) a támaszok feletti, két függőleges rúdban lép fel a maximális nyomóerő, és ezeket az erőket nem befolyásolja az alsó középső csukló vízszintes elmozdítása.

Ha pontosan akarunk fogalmazni, akkor a statikailag határozott rácsos tartók tipikusan vagy neutrális viselkedést mutatnak (mint a 3.6f-h ábrákon), vagy egyáltalán nincs optimum-elágazás (lásd a 3.6e ábrát). Ez utóbbi eset teljes mértékben összhangban van Várkonyi és Domokos *(2006)* eredményeivel, és jól egyezik a mérnökök azon felfogásával, hogy tükörszimmetrikus elrendezések előnyösek a szerkezettervezésben. A 3.6a ábrán látható rácsos tartó geometriája azonos a 3.6b ábrán található tartó geometriájával, azonban a terhelést kicsit módosítottuk. Ennek eredményeként minden optimum elágazás eltűnik és a szimmetrikus elrendezés optimális marad a p geometriai paraméter valamennyi értékénél.

3.5. DISZKUSSZIÓ ÉS A NEUTRÁLIS VISELKEDÉS ESÉLYÉT NÖVELŐ TÉNYEZŐK

Várkonyi és Domokos *(2006)* a tükörszimmetrikus mérnöki szerkezetek optimalizálásának modellezése céljából a klasszikus bifurkációknak egy kismértékű általánosítását fejlesztette ki. Megfigyelésük szerint a mérnöki problémák nagy hányadánál az optimális alakot gyakran több 'gyenge pont' együtteséből lehet meghatározni. Következésképpen a hozzá tartozó célfüggvény több sima függvény burkológörbéjeként (maximumaként) áll elő, és így az eredő egy nem-sima függvény. Várkonyi és Domokos *(2006)* osztályozta az ilyen nem-sima, tükrözött célfüggvények kritikus pontjait és megállapította a tipikus optimum-elágazások jellegét. Bemutatták, hogy az egyparaméteres függvények eme osztályában tipikusan a szimmetrikus elrendezés az optimális, és egyben a kissé aszimmetrikus optimális szerkezetek atipikusak – alátámasztva ezzel a mérnökök intuícióját. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a szerkezet optimálási problémáknak mindig van triviális (szimmetrikus) megoldása.

A jelen fejezetben statikailag határozott, kissé aszimmetrikus, optimális rácsos tartók konstruálásának lehetőségét vizsgáltuk. Várkonyi és Domokos *(2006; 2007)* munkáira építve bemutattuk, hogy ha egyetlen szimmetriasértő változót veszünk figyelembe, akkor tipikus esetekben a szimmetrikus elrendezés optimális. Példát mutattunk azonban olyan – mérnöki szempontból szokványos – tartókra, amelyek atipikus, degenerált viselkedést mutatnak: a geometriai paraméter bizonyos tartományában a kissé aszimmetrikus szerkezet egyenértékű a

szimmetrikus verzióval. Rámutattunk, hogy eme neutrális viselkedés gyakran megfigyelhető, mert egy vagy két csomópont elmozdítása gyakran csak lokálisan befolyásolja a rúderőket.

Az, hogy a statikailag határozott rácsos tartókban a neutrális viselkedés jellemző-e, és ha igen, akkor milyen mértékben, főként attól függ, hogy mennyire lokalizálható a csomóponti zavarás rúderőkre gyakorolt hatása, azaz hogy a zavarás miatt létrejövő rúderő-változások milyen méretű rúdhalmazon jelentkeznek a tartó rúdhalmazához képest.

Amennyiben terheletlen csomópontot zavarunk meg, akkor pontosan eme kérdés eldöntésére szolgál a jelen dolgozat 2. fejezetében definiált geometriai érzékenység index (érzékenység): kisebb érzékenységű tartóknál a csomóponti zavarás hatása jobban lokalizálható, mint nagyobb érzékenységű tartóknál. Ebből következően a neutrális viselkedés esélye a kisebb érzékenységű tartók esetén nagyobb. A 2.3 alfejezetben bemutattuk, hogy milyen tényezők növelik, illetve csökkentik az érzékenységet illetve példát mutattunk maximális és minimális érzékenységű rácsos tartókra. Megmutattuk például, hogy a fölös rudak száma – azaz a statikai határozatlanság foka – növeli az érzékenységet. Arra is rámutattuk, hogy a speciális teher, vagy a speciális geometria csökkentheti az érzékenységet. Továbbá bemutattunk egy a tartócsaládokra vonatkozó sejtést, amely arra enged következtetni, hogy az egyszerű rácsos tartók jellemzően kevésbé érzékenyek, mint az összetett rácsos tartók. Sejtést fogalmaztunk meg továbbá arról, hogy a minimálisan merev rácsos tartók halmazán belül csak vegyes képzésű rácsos tartók lehetnek maximális érzékenységűek, egyszerű képzésűek nem.

Ha a zavarás egy külső (támaszrúdhoz csatlakozó) csomópontot vagy egy terhelt belső csomópontot érint, akkor az maga után von(hat)ja a támaszerők megváltozását is, ezért ilyen esetekben a rúderőkre gyakorolt hatás kevésbé lokalizálható, és ezáltal kevésbé várható a neutrális viselkedés.

A helyzet azonban radikálisan megváltozik, ha egy *második szimmetriasértő változót* is bevezetünk. Ahogy arra Várkonyi és Domokos *(2007)* rámutatott, ha a szimmetriasértő változók száma egyenlő vagy nagyobb a *szimmetria csoport rendjé*nél, akkor várhatóan találunk aszimmetrikus optimumot. A síkbeli, tükörszimmetrikus rácsos tartók esetén a szimmetria csoport rendje 2, tehát – Várkonyi és Domokos eredményei alapján – tipikus esetekben legalább két szimmetriasértő változóra lenne szükség ahhoz, hogy aszimmetrikus optimumot találhassunk. A jelen fejezetben bemutattuk, hogy a statikailag határozott rácsos tartók neutrális viselkedéséből kifolyólag igen gyakran már egyetlen változó is elegendő lehet kissé aszimmetrikus optimális szerkezet létrehozására.

3.6.ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNY: 3. TÉZIS

3. Tézis

(Tóth, Domokos és Várkonyi 2007; Tóth és Domokos 2008)

Statikailag határozott, tükörszimmetrikus rácsos tartók egyetlen geometriai paraméterrel leírható családjaiban tanulmányoztam, hogy vajon léteznek-e kissé aszimmetrikus, optimális rácsos tartók.

Korábbi kutatások *(Várkonyi és Domokos 2006)* azt vetítik előre, hogy amennyiben csupán egyetlen szimmetriasértő változót alkalmazunk, és az optimáló célfüggvény a szerkezet leggyengébb elemének viselkedését írja le, akkor tipikus esetekben a szimmetrikus elrendezés optimális, és egyben kissé aszimmetrikus optimumok nem léteznek.

Példát mutattam olyan rácsos tartókra, amelyek – miközben mérnöki szempontból szokványosak – ettől eltérő, a fenti értelemben atipikus viselkedést mutatnak: a geometriai paraméter bizonyos tartományában a kissé aszimmetrikus elrendezések egy folytonos tartománya egyenértékű a szimmetrikus verzióval. Rámutattam olyan tényezőkre, amelyek növelik eme neutrális viselkedés esélyét.

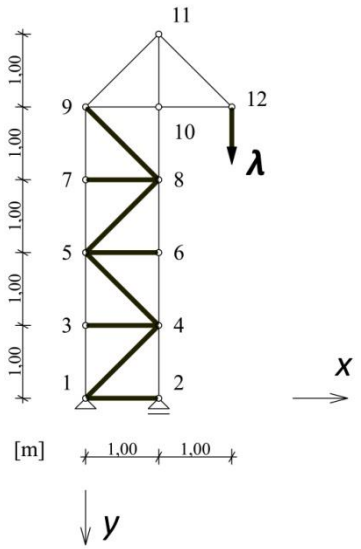
4

VAKRUDAK NEMLINEÁRIS VISELKEDÉSE

A vakrudak olyan rudak, amelyekben az adott teher hatására az elsőrendű (lineáris) elméleten alapuló számítás szerint nem ébred rúderő. A másodrendű (nemlineáris) elmélettel azonban már a bennük lévő – igen kicsiny – erők is kimutathatók. Ebben a fejezetben a vakrudaknak a külső erő típusú teher hatására mutatott erőjátékát vizsgáljuk: bemutatjuk az ilyen rudak nemlineáris számításon alapuló viselkedését és annak tartószerkezeti következményeit. A tárgyalás során feltételezzük, hogy a rúderők és rúdnyúlások kapcsolatát lineárisan rugalmas anyagmodell írja le. Az elért eredményeket a *(Tóth és Domokos 2006)*-ban publikáltuk.

4.1. VAKRUDAK: DEFINÍCIÓ, KIJELÖLÉS, TARTÓSZERKEZETI SZEREP

Ha a rácsos tartó rúdjaiban ébredő erőket a szerkezetek lineáris (elsőrendű) elméletével határozzuk meg, akkor gyakran észlelhetjük, hogy néhány rúdban nem keletkezik igénybevétel, vagyis a bennük lévő normálerők zérusnak tűnnek. Az ilyen rudakat *vakrudak*nak hívjuk (*Gáspár és Tarnai 2002*). A 4.1. ábra egy egyszerű, csuklós megtámasztású rácsos tartót ábrázol, a vakrudakat vastag vonalak jelzik.



4.1. ábra. Csuklós megtámasztású rácsos tartó a λ egyparaméteres teherrel terhelve.
A vakrudakat vastag vonal jelzi.

Vakrudakat találhatunk (illetve alakíthatunk ki) például a „T” és az „L” fajtájú csomópon-

toknál, a másodrendű rácsozások esetén, kötélsokszög szerint szerkesztett rácsos tartókban, valamint nyomásvonal alapján kialakított rácsos tartókban *(Gáspár és Tarnai 2002; Csonka 1954)*. Továbbá – tekintettel arra, hogy a 2.2 alfejezetben definiált aktív zóna komplementer rúdhalmaza vakrudakból áll – a jelen dolgozat 2.2 alfejezetében ismertetett, aktív zóna kijelölésre szolgáló módszer is alkalmas vakrudak beazonosítására.

Annak ellenére, hogy – az elsőrendű elmélet szerint – nincs bennük rúderő, a vakrudak fontos tartószerkezeti szerepet töltenek be *(Hibbeler 2006; Kollár 2010)*: a tervezettől eltérő teher esetén már részt vesznek a teherhordásban; a szerkezetépítés során növelik a szerkezet stabilitását; alapvető szerkezeti stabilitást adhatnak a szerkezetnek; csökkentik a nyomott rudak kihajlási hosszát (ezáltal növelve a kihajláshoz tartozó kritikus teherparamétert); valamint csökkentik a rugalmas alakváltozásokat. Ez utóbbi csak úgy valósulhat meg, ha a vakrudakban mégiscsak fellép valamekkora rúderő.

4.2. VAKRUDAK ERŐJÁTÉKA, KÉRDÉSFELVETÉS

A vakrudak az erőjáték szempontjából nem tipikus rudak. A '*tipikus*' kifejezést abban az értelemben használjuk, mint az elemi katasztrófa elméletben szokás: egy tipikus $f(x)$ függvény és egy tipikus $x=x_0$ érték esetén a Taylor-sor minden együtthatója különbözik zérustól. Fejezzük ki az N belsőerőt a λ teherparaméter függvényében, és írjuk fel a Taylor-sort a $\lambda=0$ triviális egyensúlyban:

$$N(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots \tag{4.1}$$

Az a_0 konstans kizárólag akkor nem zérus, ha a tartó sajátfeszültségi állapotban van, ami statikailag határozatlan tartók esetén lehetséges. Az a_1 konstans a lineáris (elsőrendű) elmélettel meghatározható belsőerőhöz tartozó együttható, vagyis vakrudak esetén a_1 szükségszerűen zérus. A vakrudak tehát nem tipikus rudak, mivel a Taylor-sorban legalább két együttható (az a_0 és az a_1) zérus. A további, a_i, $i > 1$ együtthatók azonban már a vakrudakban is eltérhetnek zérustól, alátámasztva azt, hogy az ilyen rudakban is felléphetnek – igen kicsiny – rúderők.

Célunk megvizsgálni, hogy a vakrudak eme atipikus erőjátéka milyen tartószerkezeti következményekkel jár. Mivel a lineáris elmélettel végrehajtott számítás az ilyen rudakban zérus normálerőt szolgáltat, a vakrudak nemlineáris viselkedését kell vizsgálnunk ahhoz, hogy meghatározhassuk a bennük ébredő erőket. Első célunk a *tipikus vakrudak* vizsgálata.

4.3. TIPIKUS VAKRUDAK

4.3.1. Tipikus vakrudak viselkedése

Ha egy tipikus vakrúd viselkedésére vagyunk kíváncsiak, akkor – a 'tipikus' jelző előző fejezetpontban leírt értelmezése alapján – azt kell feltételeznünk, hogy a (4.1) kifejezésben az összes a_i, $i > 1$ együttható különbözik zérustól. A $\lambda=0$–hoz közeli helyeken a lokális viselkedést az $a_2\lambda^2$ másodfokú tag fogja dominálni, tehát tipikus vakrudak esetén az N rúderő négy-

zetesen függ a λ teherparamétertől. Ez egyben azt jelenti, hogy az N előjele független a λ előjelétől, vagyis a tipikus vakrudak vagy mindig húzásra vannak igénybe véve, vagy mindig nyomásra, függetlenül a teher előjelétől. Ezt az eredményt egy darumodell példa segítségével igazoljuk a következő fejezetpontban.

4.3.2. Számpélda

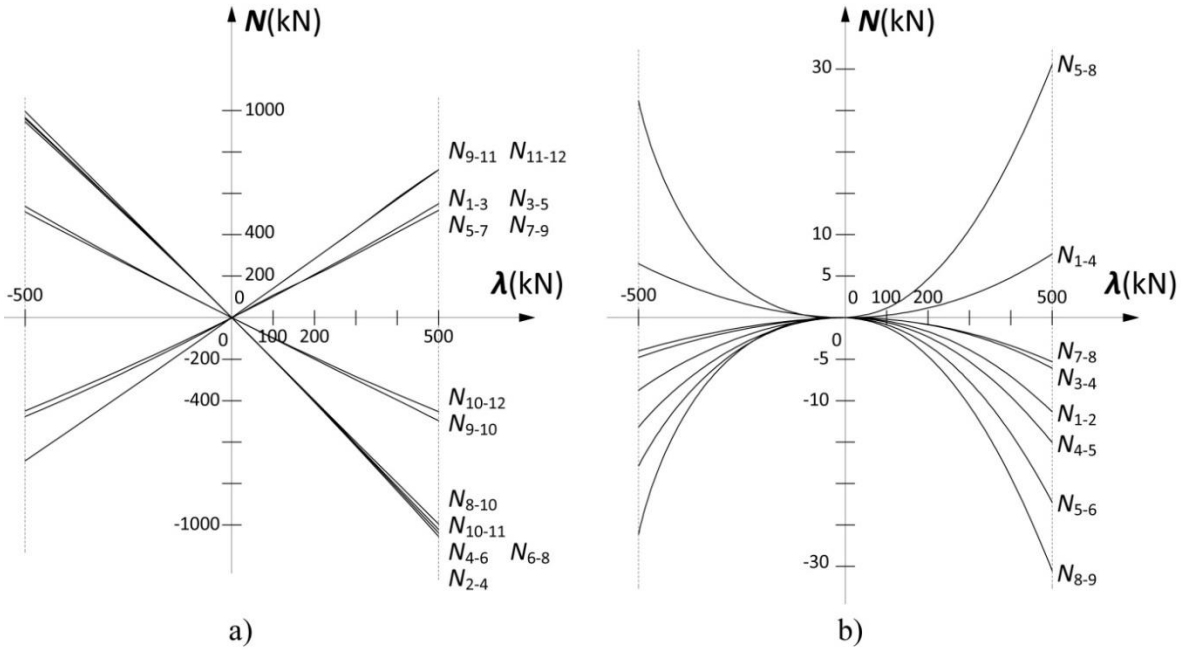
A 4.1. ábrán látható, darut modellező rácsos tartó nemlineáris viselkedését vizsgáltuk (rugalmassági modulus: E=10^4 N/mm^2, keresztmetszet-terület: A=10^4 mm^2). A nemlineáris számítás a *(Kollár 2008)* alapján a következő iterációs lépésekből állt: lineáris elmélettel meghatároztuk a λ teherintenzitás hatására létrejövő N_0 rúderőket, ε_0 nyúlásokat, ΔL_0= L_0*ε_0 megváltozott rúdhosszakat (ahol L_0 a kezdeti rúdhossz), és az utóbbiakból a csomóponti elmozdulásokat. Majd az így kapott deformált alakú tartón ismét végrehajtottuk az említett műveletsort (N_1 rúderők, ε_1 nyúlások, ΔL_1= L_0*ε_1 megváltozott rúdhosszak), és ezt addig folytattuk, amíg a rúderők konvergálását tapasztaltuk. A 4.1 táblázatban láthatók az alkalmazott teherszintekhez tartozó számítási eredmények. Figyeljük meg, hogy a ’közönséges’ (más néven aktív) rudak majdnem lineáris viselkedést mutatnak, míg a vakrudak jól láthatóan négyzetes jellegű viselkedést mutatnak (lásd egyrészt a 4.2. táblázatot, mely a 4.1. táblázat normált értékeit tartalmazza, másrészt a 4.2. ábrát). A kapott eredmény jól alátámasztja az előző (4.3.1.) fejezetpont megállapításait.

Vakrudak	λ= +100 (kN)	λ = +200 (kN)	λ = +300 (kN)	λ = +400 (kN)	λ = +500 (kN)	λ = -500 (kN)
N_{1-2}	-0,410(= N_{1-2}^{100})	-1,684	-3,888	-7,090	-11,363	-8,780
N_{1-4}	0,288(= N_{1-4}^{100})	1,170	2,677	4,839	7,691	6,516
N_{3-4}	-0,208(= N_{3-4}^{100})	-0,867	-2,029	-3,747	-6,077	-4,020
N_{4-5}	-0,573(= N_{4-5}^{100})	-2,323	-5,294	-9,528	-15,068	-13,176
N_{5-6}	-0,818(= N_{5-6}^{100})	-3,342	-7,684	-13,957	-22,278	-17,914
N_{5-8}	1,149(= N_{5-8}^{100})	4,668	10,666	19,256	30,554	26,165
N_{7-8}	-0,203(= N_{7-8}^{100})	-0,822	-1,873	-3,369	-5,322	-4,608
N_{8-9}	-1,148(= N_{8-9}^{100})	-4,663	-10,648	-19,213	-30,469	-26,245

1.1. táblázat: A vakrudakban ébredő rúderők (kN-ban) hat eltérő teherszinten.

Vakrudak	λ= +100 (kN)	λ = +200 (kN)	λ = +300 (kN)	λ = +400 (kN)	λ = +500 (kN)	λ = -500 (kN)
N_{1-2}/N_{1-2}^{100}	1	4,104	9,473	17,275	27,683	21,390
N_{1-4}/N_{1-4}^{100}	1	4,067	9,307	16,828	26,744	22,658
N_{3-4}/N_{3-4}^{100}	1	4,163	9,739	17,986	29,166	19,297
N_{4-5}/N_{4-5}^{100}	1	4,052	9,234	16,621	26,285	22,984
N_{5-6}/N_{5-6}^{100}	1	4,088	9,398	17,070	27,248	21,910
N_{5-8}/N_{5-8}^{100}	1	4,062	9,282	16,758	26,591	22,771
N_{7-8}/N_{7-8}^{100}	1	4,054	9,235	16,611	26,238	22,716
N_{8-9}/N_{8-9}^{100}	1	4,060	9,272	16,730	26,532	22,853

4.2. táblázat: Normált értékek a hat eltérő teherszinten.



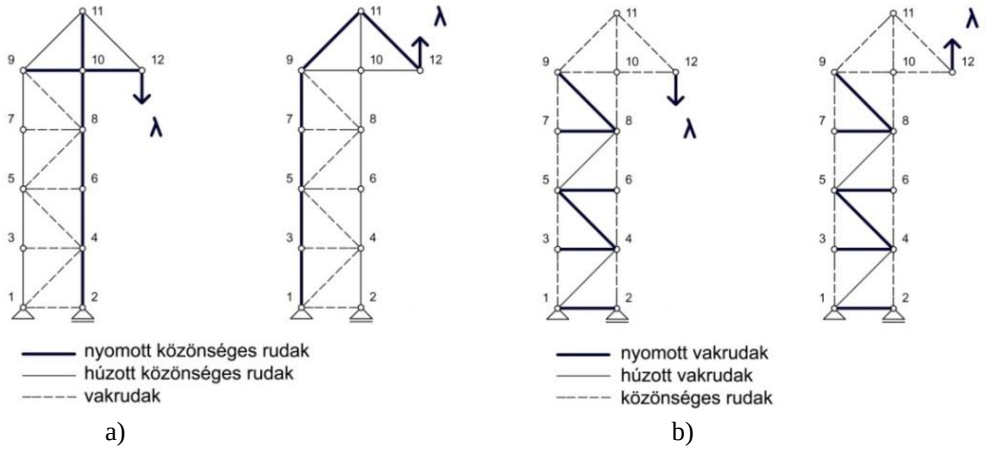
4.2. ábra. A darumodell rúdjaiban fellépő N erők a λ teherparaméter függvényében.
Figyeljük meg a közönséges rudak majdnem lineáris viselkedését (a), valamint a vakrudak majdnem kvadratikus viselkedését (b).

4.3.3. Az előjelek intuitív meghatározása

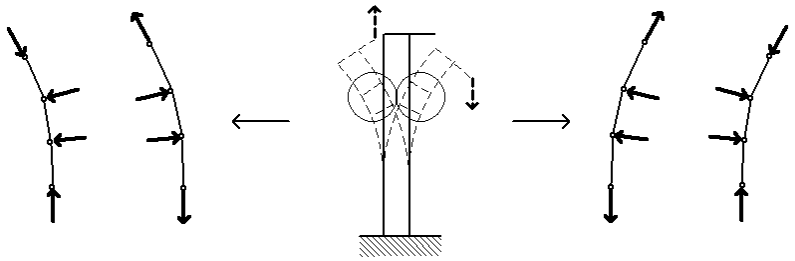
A tipikus vakrudak négyzetes viselkedésének egyik következménye, hogy egyes vakrudakban mindig húzóerő lép fel, míg néhány vakrúdban mindig nyomóerő, függetlenül a teher előjelétől (lásd a 4.3 ábrát). A vakrudakban ébredő erő előjelét a Taylor-sor a_2 együtthatója határozza meg, lásd a (4.1) kifejezést. Egy szerkezettervező mérnök számára érdekes kérdés lehet, hogy vajon ez az előjel meghatározható-e nemlineáris számítás nélkül. A daru-példa esetén erre adható egy olyan egyszerű módszer, ami a kontinuum modell használatára épít (lásd a 4.4. ábrát). Amint látható, a teher hajlítást és nyírást okoz a deformált oszlopban. Tekintsük ezt a két hatást külön-külön.

A hajlítás a függőleges oszlopot közelítőleg körívszegmenssé deformálja. Az ív belső és külső oldalán a csuklós rudak egy diszkrét poligont (rúdláncot) formálnak. Ahhoz, hogy ezek megtartsák 'köríves' alakjukat, a belső oldalukon hidrosztatikai nyomás, illetve a külső oldalukon húzás, szükséges. Ezt a hidrosztatikus terhet azok a csuklós rudak veszik fel, melyek a tartó eredeti alakjában vízszintesek voltak. Mivel a belső ív mindig nyomás alatt van, a külső pedig húzás alatt, könnyű belátni, hogy a hajlítás előjelétől függetlenül (és így a teher előjelétől függetlenül) ezek a rudak mindig *nyomás* alatt lesznek (lásd a 4.4a ábrát).

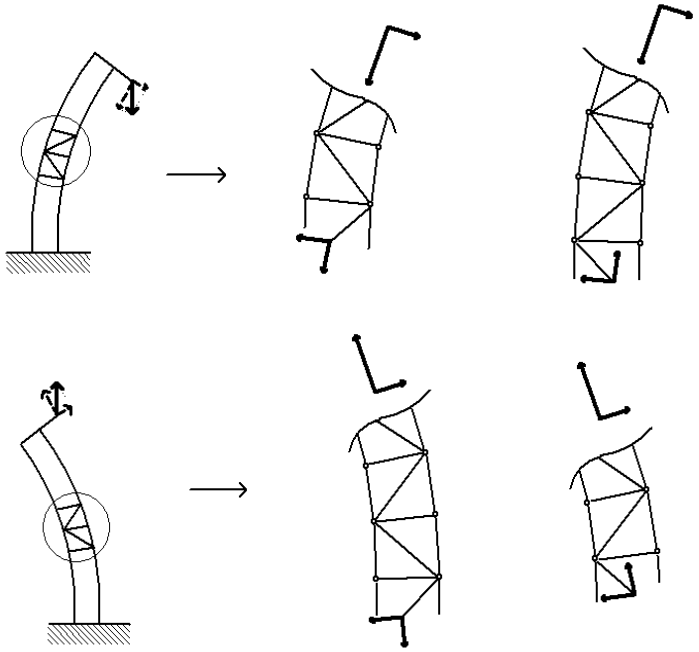
A nyírást a ferde rudak veszik fel. A hármas átmetszéssel *(Gáspár és Tarnai 2002)* létrehozott, 4.4b ábrán látható elkülönített szerkezeti ábra azt mutatja, hogy az erő előjele ismét független lesz a teher előjelétől: a felső végpontjukkal a teher irányába mutató ferde rudakban (/) mindig húzás ébred, míg a felső végpontjukkal a tehertől elmutató ferde rudakban (\) mindig nyomás lép fel.



4.3. ábra. A közönséges rudak, illetve a vakrudak eltérő viselkedése.
A közönséges rudakban a rúderők előjele a teher előjelével együtt változik (a), míg a vakrudakban a rúderő előjele független a teher előjelétől (b).



a) hajlításból származó rúderők



b) nyírásból származó rúderők

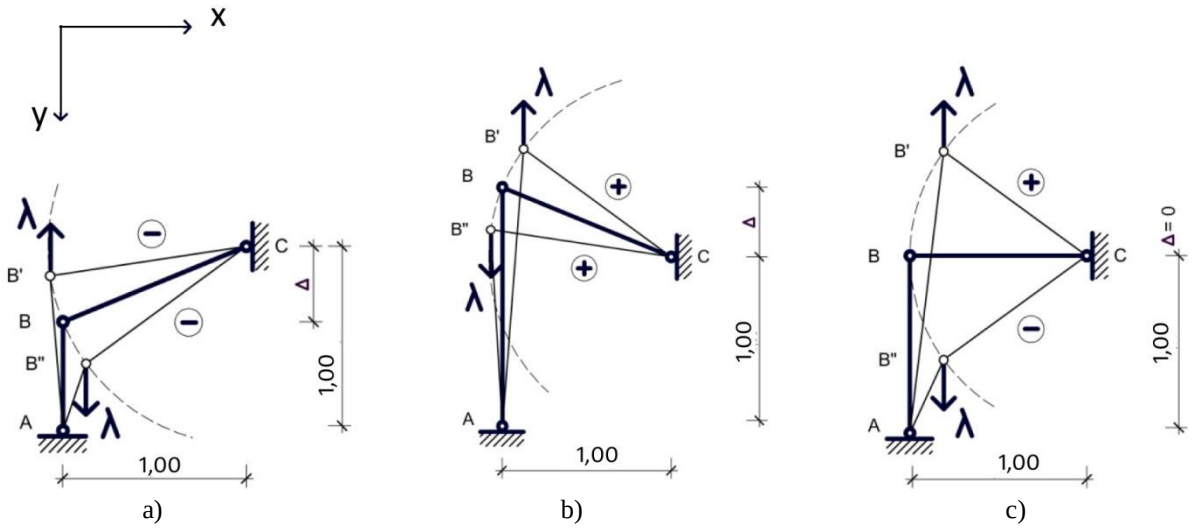
4.4. ábra. Heurisztikus magyarázat a vakrudakban ébredő rúderők előjelére.
(a) Hajlításból származó kvadratikus belső erők: a vízszintes rudak mindig nyomás alatt vannak. (b) Nyírásból származó kvadratikus belső erők: a ferde rudakban ébredő belső erők a rúd irányától függnek.

Habár a fenti heurisztikus módszer csak az adott példához alkalmazható közvetlenül, hasonló, egyszerű, a kontinuum modellen alapuló megfontolások más esetekben is segíthetnek a vakrudakban fellépő kvadratikus rúderők előjelének meghatározásában.

4.4. MAGASABB RENDŰ VISELKEDÉS: EGY DEGENERÁLT PÉLDA

A 4.3. fejezetpontban bemutattuk, hogy a tipikus vakrudak viselkedése kvadratikus. Azonban ha egy vakrúdban az a_2 együttható is eltűnik, harmadfokú viselkedésre kell számítanunk, illetve ha az a_2, a_3 …, a_{k-1} tagok egyszerre tűnnek el, akkor k-adrendű viselkedést várunk. Az elsődleges viselkedést általában az első nem zérus a_k, $k > 0$ együttható határozza meg. Egy szerkezettervező mérnök számára érdekes kérdés lehet, hogy vajon léteznek-e ilyen degenerált szerkezetek, és ha igen, akkor hogyan néznek ki.

Először egy harmadfokú viselkedést mutató egyszerű példát ismertetünk. Tekintsük a 4.5. ábrán látható háromcsuklós tartót az [xy] koordináta rendszerben.



4.5. ábra. Egy háromcsuklós tartó nemlineáris viselkedése.
(a) Általános (kvadratikus) viselkedés: a BC vakrúd mindig nyomásra van igénybe véve. (b) Általános (kvadratikus) viselkedés: a BC vakrúd mindig húzásra van igénybe véve. c) Degenerált, harmadrendű viselkedés: a BC vakrúdban ébredő rúderő előjele a teherparaméter előjelétől függ.

A tartó A(0;1) és C(1;0) csuklói fix támaszcsuklók, a λ függőleges erővel terhelt B(0; Δ) csuklót pedig az AB és a BC rudak kapcsolják a támaszokhoz. Három esetet vizsgálunk: a) $\Delta>0$, b) $\Delta<0$ és c) $\Delta=0$, melyeket a 4.5a, a 4.5b, illetve 4.5c ábrán illusztrálunk. A B csukló kezdetben egy C középpontú, BC sugarú körív mentén mozdul el, mivel az utóbbi egy vakrúd (és ezáltal a rúdereje és megnyúlása elhanyagolhatóan kicsiny az AB rúdhoz képest). A BC rúdban ébredő erő az a) esetben mindig negatív, míg a b) esetben mindig pozitív, függetlenül λ előjelétől; ez elemi statikával bizonyítható (tekintsd a nyomatéki egyenletet az A pontra). A c) esetben a BC rúderő előjele függ λ előjelétől, vagyis ez egy degenerált eset, ahol az a_2

együttható eltűnik. Az előjelek alapján tehát az 4.5a és a 4.5b ábrán négyzetes viselkedést várhatnánk, míg a 4.5c ábrán már harmadrendű viselkedést. Ezt a feltételezésünket egy az AxisVM végeselemes programmal készített numerikus számítással támasztottuk alá. (Megjegyezzük azonban, hogy 4.5c ábrán látható szerkezet vakrúdjának harmadrendű viselkedését a 6. számú mellékletben egy kézi közelítő analitikus számítással is kimutattuk.) Amennyiben $EA=10^8$ (Newton) rúdmerevséget, illetve a 4.5a és 4.5b esetben $\Delta=0{,}1$ m-t feltételeztünk, akkor a 4.3 és a 4.4 táblázatban látható rúderő-eredményeket, illetve azok normált értékeit kapjuk. Figyeljük meg a 4.5a-b ábrákon látható vakrudak négyzetes (kvadratikus), illetve a 4.5c ábrán látható vakrúd harmadrendű (köbös) viselkedését.

BC vakrúd	λ= +10 (kN)	λ = +20 (kN)	λ = +30 (kN)	λ = +40 (kN)	λ = +50 (kN)	λ = -50 (kN)
N_{BC} rúderő a 4.5a) ábrán	-0,101 (= N_{BC}^{10a})	-0,402	-0,906	-1,612	-2,52	-2,505
N_{BC} rúderő a 4.5b) ábrán	0,100(= N_{BC}^{10b})	0,402	0,903	1,605	2,507	2,518
N_{BC} rúderő a 4.5c) ábrán	$-0{,}04992*10^{-3}$ (= N_{BC}^{10c})	$-0{,}40004*10^{-3}$	$-1{,}35003*10^{-3}$	$-3{,}19993*10^{-3}$	$-6{,}24993*10^{-3}$	$6{,}25046*10^{-3}$

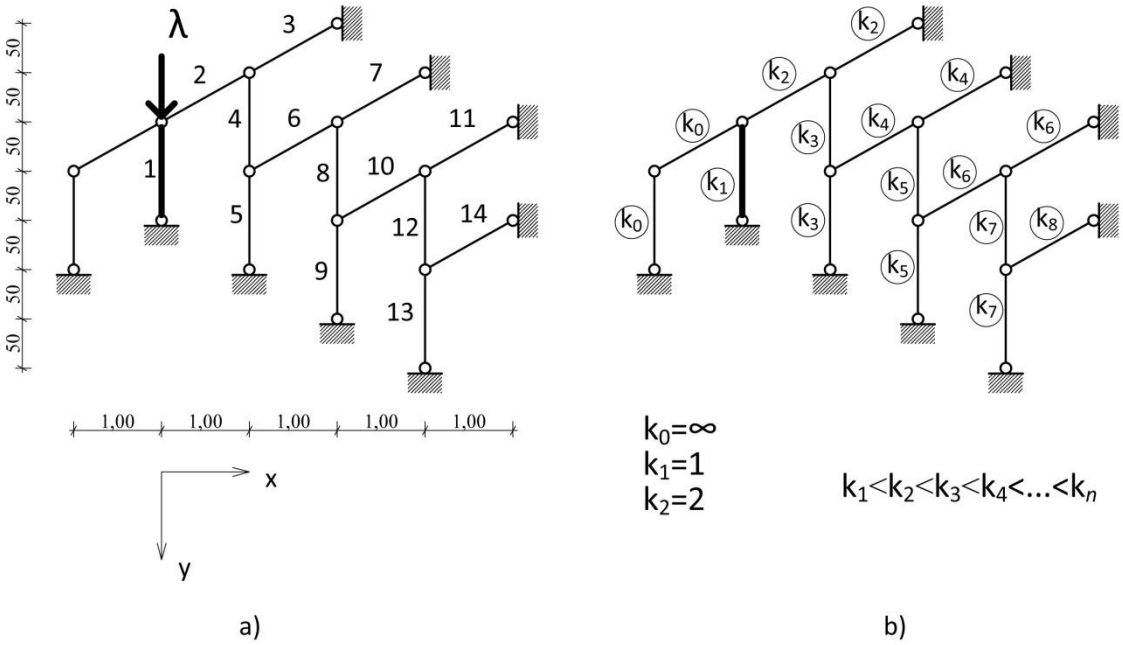
4.3. táblázat: A BC vakrúban ébredő N_{BC} rúderők (kN-ban) hat eltérő teherszinten a 4.5a, 4.5b és 4.5c ábrán látható szerkezetek esetén.

BC vakrúd	λ= +10 (kN)	λ = +20 (kN)	λ = +30 (kN)	λ = +40 (kN)	λ = +50 (kN)	λ = -50 (kN)
N_{BC}/ N_{BC}^{10a}	1	$4{,}002\approx2^2$	$9{,}010\approx3^2$	$16{,}028\approx4^2$	$25{,}058\approx5^2$	$24{,}913\approx(-5)^2$
N_{BC}/ N_{BC}^{10b}	1	$3{,}998\approx2^2$	$8{,}992\approx3^2$	$15{,}977\approx4^2$	$24{,}953\approx5^2$	$25{,}071\approx(-5)^2$
N_{BC}/ N_{BC}^{10c}	1	$8{,}014\approx2^3$	$27{,}044\approx3^3$	$64{,}101\approx4^3$	$125{,}199\approx5^3$	$-125{,}21\approx(-5)^3$

4.4. táblázat: Normált értékek a hat eltérő teherszinten.

Ennél magasabb rendű degenerált példák is készíthetők: a 4.6. ábra egy tetszőleges (de véges) mértékben degenerált példát mutat be: a domináns (k-adik) együttható értéke annál nagyobb, minél több szintje van a szerkezetnek. Habár a 4.6. ábrán látható szerkezet csak egyetlen példa, mégis segíthet a magasabb rendű vakrudakat tartalmazó elrendezések megértéséhez. A bemutatott példa két olyan rudat is tartalmaz, melyekben az összes a_k együttható egyszerre zérus ($k\rightarrow\infty$). Ezeket a vakrudakat *végtelenül degenerált vakrudak*nak hívjuk és a 4.6b ábrán $k_0=\infty$-nel jelöltük. Könnyen belátható, hogy minden olyan vakrúd, ami topológiai okból vakrúd, egyben végtelenül degenerált típusú vakrúd. (Feltételezésünk szerint az is igaz, hogy minden végtelenül degenerált vakrúd topológiai okokból inaktív, míg az egyéb vakrudak a degenerált teher és/vagy a degenerált geometria miatt.)

A 4.6b ábrán látható szerkezetnek több teherszinten elvégeztük egy végeselemes (AxisVM) számítását, mely során $EA=10^8$ Newton rúdmerevséget feltételeztünk. A számítások eredményét a 4.5 ás 4.6 táblázat tartalmazza (a táblázatokban csak azok a vakrúderők szerepelnek, amelyek esetén a program értékelhető eredményt adott). Figyeljük meg, hogy a 2. és a 3. jelű rúd a kisebb teherszinteken közel négyzetes viselkedést mutat, míg a 4. és az 5. jelű rúd közel harmadfokú viselkedést.



4.6. ábra. Egy degenerált szerkezet, mely egyetlen közönséges rudat (lásd a vastag vonallal jelölt rudat) és több, különböző rendben elfajult vakrudat tartalmaz.

Az a) ábrán a terhelt tartó méreteit és a rudak számozását ábrázoltuk. A b) ábrán a körökben feltüntetett k_i számértékek azt jelzik, hogy az adott rúdban ébredő rúderő a λ teherparaméter mely hatványával arányos. A hatványok értéke (azaz a vakrudak elfajulásának rendje) a szerkezet szintszámával egyre növekszik.

Vakrudak	λ=+1000 (kN)	λ=+2000 (kN)	λ=+5000 (kN)	λ =+10000 (kN)	λ= -10000 (kN)
N_2	-5,895 (=N_2^{1000})	-24,944	-189,301	-1273,453	-363,343
N_3	-5,865 (=N_3^{1000})	-24,691	-184,278	-1190,350	-1742,041
N_4	0,0657 (= N_4^{1000})	0,5553	10,6345	162,2074	-44,2158
N_5	0,06571 (=N_5^{1000})	0,5552	10,6222	161,0135	-44,1096

4.5.táblázat: A vakrudakban ébredő rúderők (kN-ban) hat eltérő teherszinten.

Vakrudak	λ=+1000 (kN)	λ=+2000 (kN)	λ=+5000 (kN)	λ =+10000 (kN)	λ= -10000 (kN)
N_2/ N_2^{1000}	1	$4{,}23\approx 2^2=4$	$32{,}11\approx 5^2=25$	216,02	68,36
N_3/ N_3^{1000}	1	$4{,}21\approx 2^2=4$	$31{,}42\approx 5^2=25$	202,94	71,38
N_4/ N_4^{1000}	1	$8{,}45\approx 2^3=8$	$161{,}83\approx 5^3=125$	2468,48	-107,21
N_5/ N_5^{1000}	1	$8{,}45\approx 2^3=8$	$161{,}66\approx 5^3=125$	2450,40	-107,14

4.6. táblázat: Normált értékek a hat eltérő teherszinten.

Vegyük észre továbbá, hogy a 4. jelű rúdban fellépő, közelítően függőleges F_4 rúderő (ahol $F_4 \sim \lambda^3$) az alatta elhelyezkedő szerkezetrész szempontjából ugyanolyan (közelítően) függőleges terhelő erőnek tekinthető, mint λ teher a teljes szerkezetre nézve. Amennyiben ez az F_4 rúderő tökéletesen függőleges maradna a terhelés után is, akkor a 6. és a 7. jelű rúdban fellépő rúderők az F_4 rúderő négyzetes függvényei lennének (csakúgy, mint ahogy a 2. és a 3. jelű rúdban fellépő rúderők λ négyzetes függvényei), azaz $F_6 \approx F_7 \sim (F_4)^2 \sim (\lambda^3)^2 = \lambda^6$ lenne, továbbá hogy ez így folytatódna minden szinten a szerkezetben lefelé haladva. Következtetésképpen belátható, hogy a 4.6 ábrán látható szerkezet sémájára tetszőleges korlátnál magasabb, véges rendben elfajuló vakrudak képezhetők.

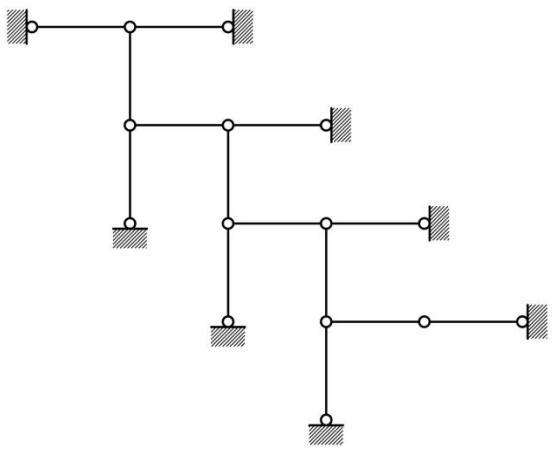
4.5. DISZKUSSZIÓ

Ebben a fejezetben bemutattuk, hogy a csuklós megtámasztású rácsos tartók azon rúdjaiban, melyekben a lineáris elmélet zérus belsőerőt ad, a nemlineáris viselkedés tipikusan kvadratikus. Ezt a megfigyelést egy egyszerű síkbeli rácsos tartó numerikus számításával szemléltettük. Az észlelt viselkedés következménye, hogy a vakrudakban ébredő belsőerők előjele tipikusan független a teher előjelétől. Bemutattunk egy olyan egyszerű, intuitív, a kontinuum modellen alapuló módszert, amellyel előre megjósolható a kvadratikus erő előjele. Mutattunk egy olyan példát, amely tetszőleges korlátnál magasabb, véges k-adrendben elfajuló rudakat tartalmaz, vagyis az N rúderők a λ teherparamétertől úgy függnek, hogy: $N \approx \lambda^k$, ahol $\lambda << 1$.

Tartószerkezeti szempontból érdekes felvetésnek tűnik a tipikus vakrudak huzalokkal, illetve dúcokkal történő helyettesítése, mivel az ilyen vakrudakban vagy mindig húzás, vagy mindig nyomás ébred, a teher előjelétől függetlenül. Megjegyzendő azonban, hogy egy így felépített szerkezet terheletlen állapotban nem állékony.

Hasonló, szorosan idekapcsolódó jelenség figyelhető meg a szerkezetek merevségének vizsgálatakor. Ennek során azt tapasztaljuk, hogy a kezdeti (terheletlen) geometriai elrendezés során zérus merevséggel rendelkező szerkezetek a terhelést követően tipikusan pozitív merevségűvé válnak amiatt, hogy a merevség a terhek és az elmozdulások kvadratikus függvénye *(Kollár 1988; Pellegrino és Calladine 1986)*. Figyeljük meg azonban a két jelenség közti különbséget is: míg egy szerkezet merevsége tipikusan pozitív, a rácsos tartókban ébredő rúderők pozitív és negatív előjelűek is lehetnek.

A 4.6 ábrán látható, tetszőleges rendű vakrudakat tartalmazó degenerált szerkezet markáns hasonlóságot mutat egy speciális *mechanizmus*sal, melyet a *(Tarnai 1989b)* és a *(Hortobágyi 2000)* tárgyal, és amely eredetileg Leonardo da Vincihez *(1493)* köthető (lásd a 4.7 ábrát). Ebben a mechanizmusban a szerkezet egyik, illetve másik végén keletkező elmozdulások közötti kapcsolatot leíró függvény tetszőleges k szint esetén 2^k-1, vagyis tetszőleges korlátnál nagyobb rendű függvény lehet.



4.7. ábra. Leonardo da Vinci magasabb rendű infinitezimális mechanizmusa.

4.6.ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNY: 4. TÉZIS

4. Tézis
(Tóth és Domokos 2006)

Lineárisan rugalmas anyagmodellt feltételezve a vakrudak erőjátékának nemlineáris vizsgálata alapján a következő tartószerkezeti megállapításokat tettem:

4.1. Rámutattam, hogy a tipikus vakrudak vagy mindig húzottak, vagy mindig nyomottak, a teher előjelétől függetlenül. Ezt a megállapítást egy egyszerű síkbeli rácsos tartó numerikus számításával illusztráltam. Bemutattam, hogy ilyen vakrudakban a rúderő előjele bizonyos esetekben kimutatható nemlineáris számítás nélkül, elemi statikai vizsgálatok segítségével is.

4.2. Bemutattam, hogy a vakrudak osztályozhatók az alapján, hogy a bennük fellépő rúderő a teherparaméter mely hatványával arányos. Példát mutattam olyan szerkezetcsaládra, mellyel tetszőleges korlátnál magasabb, véges rendben elfajuló vakrudak képezhetők.

5

ÖSSZEFOGLALÁS ÉS ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

A 2. fejezetben a síkbeli rácsos tartók *erőjáték*a és a tartó *gráf-modell*je közötti összefüggéseket vizsgáltam. Eme összefüggések a mérnököket abban segíthetik, hogy a szerkezetek erőjátékát, viselkedését egyszerűen átláthassák.

Arra kerestem a választ, hogy egy csomópontjain terhelt tartóban egy terheletlen csomópont helyzetének módosítása (megzavarása) a tartó mely rúdjaiban idézi elő a rúderők megváltozását. Ezen utóbbi rudak halmazát (a kapcsolódó csomópontokkal együtt) az adott csomópont *befolyásolt zónájá*nak neveztem.

Eme feladat megoldása során azt is vizsgáltam, hogy egy adott csomóponthalmazon működő külső egyensúlyi erőrendszer hatására mely rudakban keletkezik rúderő, illetve hogy egy statikailag határozatlan tartó mely rúdjaiban léphet fel sajátfeszültség.

Olyan módszerek bemutatását tűztem ki célul, melyekkel az említett három rúdhalmaz kijelölhető rúderőszámítás és metrikus adatok megadása nélkül, pusztán a tartó gráf-modelljealapján, kombinatorikus eszközökkel.

Ha egy rácsos tartóban átlagoljuk a befolyásolt zónák rúdszámát és ezt osztjuk a tartó rúdszámával, akkor a tartó *geometriai érzékenységi indexét* – röviden érzékenységét – kapjuk. Ez a 0 és 1 közötti mérőszám megmutatja, hogy egy szerkezet átlagosan mennyire érzékeny kis csomóponti hibákra, tökéletlenségekre. Eme definíció alapján célul tűztem ki minimális és maximális érzékenységű rácsos tartók, valamint az érzékenységet növelő, illetve csökkentő tényezők felkutatását, ezáltal segítve a szerkezettervezőket abban, hogy a csomóponti tökéletlenségre kevésbé érzékeny tartókat tervezzenek.

A megtámasztott és megtámasztás nélküli esetek egységes tárgyalása érdekében a statikai határozottság, illetve határozatlanság helyett a *minimális merevség*, illetve *redundáns merevség* fogalmát használtuk. Vizsgálataimat alapvetően *tipikus rácsostartó-feladatok*on végeztem el.

Az érzékenységet nem csupán egyedi rácsos tartókon, hanem azokból képzett sorozatokon is tanulmányoztuk. Ez utóbbiak vizsgálatára bevezettük a (diszkrét) *rácsostartó-család*ok fogalmát, melyeket egy kiinduló rácsos tartóból rekurzív bővítési lépések sorozatával képeztünk. Tisztán Henneberg 1-es lépésekkel képzett, illetve vegyes képzésű családokban vizsgáltam, hogy miként változik az érzékenység az egyes családokon belül, van-e határértéke, és ha igen, akkor ez mennyi.

Az elért eredményeket az 1. tézis és a 2. tézis ismerteti.

1. Tézis[1]

(Tóth, Domokos és Gáspár 2009; Tóth 2011; Tóth 2012)

[1] A *-gal jelölt állítások egy másik, a jelen értekezésben ismertetettől eltérő, annál részletesebb, matematikai nyelvezetű és szemléletű bizonyítása a *(Jordán, Domokos, Tóth 2013)*-ban található.

Bemutattam, hogy síkbeli, tipikus rácsostartó-feladatok esetén a befolyásolt zóna kijelölhető erőtani számítások nélkül is, önmagában a tartó topológiáját leíró gráf alapján:

1.1. Bevezettem egy *csomóponthalmaz merev mag*ja fogalmát, mely a minimálisan merev rácsos tartónak az adott csomóponthalmazt tartalmazó, legkevesebb rúddal rendelkező, összefüggő, minimálisan merev része.

1.2. Kimutattam, hogy minimálisan merev szerkezet esetén egy adott csomópont befolyásolt zónája azonos az ugyanazon csomóponttal szomszédos csomóponthalmaz merev magjával*.

1.3. A redundánsan merev esetet, az erőmódszer gondolatmenetére támaszkodva, visszavezettem a minimálisan merev tartókra: bemutattam, hogy ilyen esetben a befolyásolt zónát több alkalmasan kijelölt merev mag egyesítésével képzett halmaz alkotja*.

1.4. Algoritmusokat mutattam arra, hogy miként jelölhető ki pusztán a tartó gráfmodellje ismeretében a merev mag, a befolyásolt zóna, a külső teher hatására aktív rudak halmaza, valamint a tartó sajátfeszültségi állapotában aktív rudak halmaza.

1.5. A merev mag fogalmának segítségével a rúdpótlás végrehajtásának új, (szükséges és egyben elégséges) kombinatorikai feltételét adtam tipikus rácsos tartó feladatok esetére.

2. Tézis

(Tóth és Domokos 2009; Tóth, Domokos és Gáspár 2009; Tóth 2011; Tóth 2012; Jordán, Domokos és Tóth 2013)

Definiáltam a rácsos tartók *geometriai érzékenység index*ét (röviden érzékenységét). Ennek alapján példákat mutattam minimális illetve maximális érzékenységű minimálisan merev rácsostartó-típusokra, továbbá mutattam két olyan tényezőt, melyekkel az érzékenység növelhető illetve csökkenthető:

2.1. Megmutattam, hogy a fölös rudak számának (azaz a statikai határozatlanság fokának) növelése az érzékenység monoton növekedését idézi elő.

2.2. Rámutattam, hogy a mérnöki gyakorlatban elterjedt rácsostartó-geometriák érzékenysége egy azonos topológiájú, véletlenszerű geometriával konstruált tartó érzékenységénél kisebb vagy legfeljebb egyenlő azzal.

Rekurzív bővítési lépéssel képzett rácsos tartó-családok érzékenységét vizsgáltam a lépésszám függvényében. Ennek keretében:

2.3. Igazoltam, hogy amennyiben a rekurzív bővítés csak Henneberg 1-es típusú elemekből áll, és a bővítés üteme a lépésszám polinomiális függvénye, valamint (a kezdeti családtag csomópontjait kivéve) minden csomópont legfeljebb a csomópont keletkezését követő lépésben eléri végleges fokszámát, akkor az érzékenység határértéke (ahogy a lépésszám a végtelenhez tart) legfeljebb 0.5.

A 3. fejezetben, azt vizsgáltam, hogy vajon javítható-e a síkbeli, tükörszimmetrikus statikailag határozott rácsos tartók viselkedése kis csomóponti zavarással.

Várkonyi és Domokos *(2006)* korábban a tükörszimmetrikus szerkezetek egyetlen geometriai paraméterrel (ilyen például a tartó magassága) leírható családjaiban létrejövő, tökéletlenül szimmetrikus (azaz kissé aszimmetrikus) szerkezeti optimumokról számolt be. Ebben azt vetítik előre, hogy ha csak egyetlen szimmetriasértő geometriai változót (x) engedünk meg, akkor a tökéletesen szimmetrikus (x=0) konfiguráció tipikusan optimális, és egyben a kissé aszimmetrikus szerkezeti optimumok ($|x|<<1$) atipikusak a mérnöki optimálási problémák nagy hányadában. Ez összhangban van a mérnökök ama alapvető intuíciójával, mely szerint a szimmetrikus elrendezésű szerkezetek kedvezőbbek a kissé aszimmetrikus hasonmásuknál.

Dolgozatomban célul tűztem ki annak megvizsgálását, hogy Várkonyi és Domokos *(2006)* kutatási eredményét vajon a tükörszimmetrikus, statikailag határozott rácsos tartók egyparaméteres családjai is alátámasztják-e, vagy léteznek-e mégis kissé aszimmetrikus, optimális szerkezetek az ilyen tulajdonságú tartók között.

Az ehhez kapcsolódó eredményeket a 3. Tézisben ismertettem.

3. Tézis

(Tóth, Domokos és Várkonyi 2007; Tóth és Domokos 2008)

Statikailag határozott, tükörszimmetrikus rácsos tartók egyetlen geometriai paraméterrel leírható családjaiban tanulmányoztam, hogy vajon léteznek-e kissé aszimmetrikus, optimális rácsos tartók.

Korábbi kutatások *(Várkonyi és Domokos 2006)* azt vetítik előre, hogy amennyiben csupán egyetlen szimmetriasértő változót alkalmazunk, és az optimáló célfüggvény a szerkezet leggyengébb elemének viselkedését írja le, akkor tipikus esetekben a szimmetrikus elrendezés optimális, és egyben kissé aszimmetrikus optimumok nem léteznek.

Példát mutattam olyan rácsos tartókra, amelyek – miközben mérnöki szempontból szokványosak – ettől eltérő, a fenti értelemben atipikus viselkedést mutatnak: a geometriai paraméter bizonyos tartományában a kissé aszimmetrikus elrendezések egy folytonos tartománya egyenértékű a szimmetrikus verzióval. Rámutattam olyan tényezőkre, amelyek növelik eme neutrális viselkedés esélyét.

A 4. fejezetben a vakrudakkal foglalkoztam. Mint ismert, ilyen rudakban az adott teher hatására az elsőrendű (lineáris) elméleten alapuló számítás szerint nem ébred rúderő. A másodrendű – nemlineáris – elmélettel azonban már a bennük lévő, igen kicsiny rúderők is kimutathatók. Célom annak megvizsgálása volt, hogy a vakrudak nemlineáris viselkedése alapján milyen tartószerkezeti következtetések vonhatók le.

Az erre vonatkozó eredményeket a 4. Tézis mutatja be.

4. Tézis
(Tóth és Domokos 2006)

Lineárisan rugalmas anyagmodellt feltételezve a vakrudak erőjátékának nemlineáris vizsgálata alapján a következő tartószerkezeti megállapításokat tettem:

4.1. Rámutattam, hogy a tipikus vakrudak vagy mindig húzottak, vagy mindig nyomottak, a teher előjelétől függetlenül. Ezt a megállapítást egy egyszerű síkbeli rácsos tartó numerikus számításával illusztráltam. Bemutattam, hogy ilyen vakrudakban a rúderő előjele bizonyos esetekben kimutatható nemlineáris számítás nélkül, elemi statikai vizsgálatok segítségével is.

4.2. Bemutattam, hogy a vakrudak osztályozhatók az alapján, hogy a bennük fellépő rúderő a teherparaméter mely hatványával arányos. Példát mutattam olyan szerkezetcsaládra, mellyel tetszőleges korlátnál magasabb rendben elfajuló vakrudak képezhetők.

A Szerző reményét fejezi ki, hogy az értekezés hozzájárul a rácsos tartók erőjátékának – illetve az erőjátéknak és a gráf-modellel mutatott kapcsolatának – mélyebb megértéséhez.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Mindenekelőtt köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, *Domokos Gábor*nak az érdekes kutatási téma felvetéséért és a témavezetői útmutatásért, segítségnyújtásért.

A releváns szakirodalom felkutatásában nyújtott segítségért, illetve az értékes megjegyzésekért és javaslatokért köszönettel tartozom *Armuth Miklós*nak, *Gáspár Zsolt*nak, *Jordán Tibor*nak, *Kollár László*nak, *Sajtos István*nak, *Tarnai Tibor*nak és *Várkonyi Péter*nek. Közülük *Jordán Tibor*nak és *Tarnai Tibor*nak külön köszönöm, hogy bevezettek engem a gráfelméleti valamint szerkezet-topológiai alapismeretekbe.

Köszönöm *Édesapám*nak, amiért a vakrudak tanulmányozására irányította a figyelmemet. Továbbá hálás vagyok mindazoknak – különösen a *Családom*nak –, akik segítettek és buzdítottak engem a doktori fokozat megszerzésének időszakában.

A kutatást az OTKA T046646 és TS49885 számú pályázatai, valamint a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0009 projekt támogatta.

TÉZISEKHEZ KAPCSOLÓDÓ PUBLIKÁCIÓK

Tóth, K., Domokos, G. (2006) On the non-linear response of zero-force members, *International Journal of Mechanical Engineering Education* **34/2**, 175-182

Tóth, K., Domokos, G., Várkonyi, P., L. (2007) Optimal trusses with imperfect symmetry, *In:* Recent Developments in Structural Engineering, Mechanics and Computation: Proc. 3rd Int. Conf. on Eng., Mech. and Comp., Cape Town, Dél-Afrika, 2007.09.10-2007.09.12., A. Zingoni (szerk.), Millpress Science Publishers, 1779-1783

Tóth, K., Domokos, G. (2008) Neutral behaviour of trusses: imperfect symmetry and geometry, *In:* Symmetry: Art and Science. Lviv, Ukrajna, 2008.10.06-2008.10.12., O. Bodnar, D. Nagy (szerk.) 114-117

Tóth, K., Domokos, G. (2009) Mérnöki rácsos tartók érzékenysége a geometriai tökéletlenségekre, *In:* Proc. ÉPKO 2009 XIII. Nemzetközi Építéstudományi Konferencia. Csíksomlyó, Románia, 2009.06.11-2009.06.14., Köllő Gábor (szerk.) 489-493

Tóth, K., Domokos, G., Gáspár, Zs. (2009) Statikailag határozott rácsos tartók geometriai érzékenysége, *Építés- Építészettudomány* **37/3-4,** 225-240

Tóth, K. (2011) Geometric sensitivity of statically determinate planar truss families, *Periodica Polytechnica Architecture,* **42/2**, 11-18

Tóth, K. (2012) Statikailag határozatlan síkbeli rácsos tartók geometriai érzékenysége és sajátfeszültségi állapota, *Építés- Építészettudomány* **40/1-2,** 79-96

Jordán, T., Domokos, G., Tóth, K. (2013) Geometric sensitivity of rigid graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics,* **27/4**, 1710-1726

EGYÉB PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN

Dóbé, P., Tóth, K., Domokos, G. (2010) Párhuzamosított módszerek rácsos tartók geometriai érzékenységének vizsgálatára. *In:* Proceedings of Networkshop 2010 Konferencia, Debrecen, 65-66

Dóbé, P., Tóth, K., Domokos, G. (2011) Algorithmic approaches for calculating the geometric sensitivity of statically determinate plane trusses, *In:* Proceedings of XI. Magyar Mechanikai Konferencia. Miskolc, Magyarország, 2011.08.29-2011.08.31. Miskolc: Miskolci Egyetem Mechanikai Tanszék, Baksa Attila, Bertóti Edgár, Szirbik Sándor (szerk.), pp. 1-5. Paper 117. (ISBN: 978-963-661-975-6)

HIVATKOZÁSOK

Berg, A., Jordán, T. (2003) Algorithms for graph rigidity and scene analysis, Proc. 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA) 2003, (G. Di Battista, U. Zwick, szerk.) Springer Lecture Notes in Computer Science 2832, 78-89

Connelly, R. (1987) The Basic Concepts of Static Rigidity, draft book chapter, elérhető: http://www.math.cornell.edu/~connelly/rigidity.chapter.3.pdf

Csonka, P. (1954) *Statika II.*, Tankönyvkiadó, Budapest

Csonka, P. (1959) Dimitrij Ivanovics Zsuravszkij, *Építési és Közlekedéstudományi Közlemények* **3/3-4**, 377-389

Dóbé, P., Domokos, G. (2011) Combinatorial Measurement of the Geometric Sensitivity of Plane Trusses, *In:* Proceedings of The 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Kyoto, Japan, 2011. June, S. Iwata (szerk.) 29-36

Dóbé, P., Domokos, G. (2014) Computer-Aided Geometric Sensitivity Analysis of Plane Trusses with a Square Grid Topology, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering*, bírálat alatt

Gáspár, Zs. (2005) Mechanical models for the subclasses of catastrophes. In: M. Pignataro, V. Gioncu (eds) *Phenomenological and mathematical modelling of structural instabilities*, CISM Courses and Lectures No. 470 Springer, Wien, New York, 277-336

Gáspár, Zs., Tarnai, T. (2002) *Statika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest

Graver, J., Servatius, B., Servatius, H. (1993) *Combinatorial Rigidity*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 2, American Mathematical Society

Haas, R., Orden, D., Rote, G., Santos, F., Servatius, B., Servatius, H., Souvaine, D., Streinu, I., Whiteley, W. (2005) Planar minimally rigid graphs and pseudo-triangulations, *Computational Geometry* **31**, 31-61

Hámori, J. (1999) Aszimmetriák a biológiában: az ember, *Magyar Tudomány* **3**, 302-310.

Henneberg, L. (1886) *Lehrbuch der Technischen Mechanik, I. Teil: Statik der starren Systeme*, Verlag von Arnold Bergsträsser, Darmstadt

Henneberg, L. (1911) *Die graphische Statik der starren Systeme*, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig

Hibbeler, R. C. (2006) *Structural Analysis*, Prentice-Hall, Singapore, 7th ed. in SI units

Hortobágyi, Zs. (2000) Numerical analysis of inextensional, kinematically indeterminate assemblies. *Periodica Polytechnica, Ser. Mech. Eng*. **44,** 43-55

Jackson, B., Jordán, T., Szabadka, Z. (2006) Globally linked pairs of vertices in equivalent realizations of graphs, *Discrete Comput. Geom.*, **35,** 493–512

Jordán, T., Recski, A., Szeszlér, D. (2004) *Rendszeroptimalizálás*, Typotex Kiadó, Budapest

Kaliszky, S., Kurutzné Kovács, M., Szilágyi, GY. (2000) *Szilárdságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest

Kollár, L. (1988) Rigidity problems of cable structures, *Közlekedésépítés- és Mélyépítéstudományi Szemle* **38**, 241-248.

Kollár, L., Vámossy, F. (1996) *Mérnöki alkotások esztétikája*, Akadémiai Kiadó, Budapest

Kollár, L. (2008) *Bevezetés a tartószerkezetek tervezésébe*, Műegyetemi Kiadó, Budapest

Kollár, L. (2010) *Tartószerkezetek statikája*, Műegyetemi Kiadó, Budapest

Korányi, I. (1953) *Tartók sztatikája I.: Statikailag határozott tartók*, Tankönyvkiadó, Budapest

Korányi, I. (1954) *Tartók sztatikája II.: Statikailag határozatlan tartók*, 1. füzet, Tankönyvkiadó, Budapest

Korányi, I. (1957) *Vashidak ábragyűjtemény*, Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest

Korn, G. A., Korn, T. M. (1968) *Mathematical handbook for engineers*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York

Kossalka, J. (1920) *Tartók statikája*, I. kötet, Németh József Technikai Könyvkiadóvállalata, Budapest

Kurrer, K., E. (2008) *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn Verlag, Berlin

Kurutzné Kovács, M. (2003) *Tartók statikája.* Műegyetemi kiadó

Laman, G. (1970) On graphs and rigidity of plane skeletal structures, *Journal of Engineering Mathematics* **4**, 331-340

Leonardo da Vinci (1493) *Tratado de estática y mecánica en italiano* (title added to manuscript 8937, Biblioteca Nacional de España), vol. 1, 1493. Facsimile edition published by McGraw-Hill, 1974. [Nielsen 1998] J. Nielsen, "Leonardo da Vinci and the parallelogram of forces", J. IASS 39 :1 (1998), 47–53.

Lovász, L., Yemini, Y. (1982) On generic rigidity in the plane, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **3**, 91-98

Maxwell, J. C. (1864) On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, *Philosophical Magazine* **27**, 294-299

Müller-Breslau, H. (1887) *Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Band I.*, Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig

Müller-Breslau, H. (1891/92) Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, *Zentralblatt der Bauverwaltung* **11/44**, 437-440

Müller-Breslau, H. (1913) *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*, Alfred Körner Verlag, Leipzig

Nagy, Gy., Recski, A. (1998) Rúd-csukló szerkezetek, KöMal szakmai cikkek, 72-75., elérhető: http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199917

Pellegrino, S., Calladine, C. R. (1986) Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks, *Int. J. Solids Stroctures* **22,** 409-428

Poston, T., Stewart, J. (1978) *Catastrophe theory and its applications*, Pitman, London

Servatius, B.. Shai, O., Whiteley, W. (2010) Combinatorial Characterisation of the Assur Graphs from Engineering, *European Journal of Combinatorics* **31/4**, 1091-1104

Szabó, J., Roller, B. (1971) Rúdszerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Tankönyvkiadó, Budapest

Tarnai, T. (1989b) Higher-order infinitesimal mechanisms. *Acta Technica Acad. Sci. Hung*. **102,** 363-378

Tarnai, T. (1990) Kinematikailag határozatlan szerkezetek és szerkezet-topológia, doktori értekezés, Budapest

Várkonyi, P. L., Domokos, G. (2006) Symmetry, optima and bifurcations in structural design, *Nonlinear Dynamics* **43**, 47-58

Várkonyi, P.L. (2006) *Emergence of Imperfect Symmerty in Engineering Optimization and Evolution*, doktori értekezés

Várkonyi, P. L., Domokos, G. (2007) Imperfect symmetry: a new approach to structural optima via group presentation theory, *International Journal of Solids and Structures* **44**, 4723-4741

Whiteley, W. (1997) Matroids from Discrete Geometry, in book: *Matroid Theory*, J. Bonin, J. Oxley and B. Servatius eds., AMS Contemporary Mathematics, 171-313

MELLÉKLETEK

1. sz. melléklet:
JELÖLÉSRENDSZER

$A(V)$	- a V csomóponthalmaz aktív zónája
$B(v_i)$	- a v_i csomópont befolyásolt zónája
c	- a tartó fix környezettel nem érintkező csuklóinak száma
$c(B(v_i))$	- a $B(v_i)$ befolyásolt zóna csuklóinak száma
$d(v_i)$	- a v_i jelű csomópont fokszáma
e_i	- i-edik rúd (gráfban él)
E (mint „edge”)	- (tetszőlegesen kiválasztott) rúdhalmaz (gráfban élhalmaz) jele
$E(v_i)$	-a v_i csomóponttal szomszédos rudak (gráfban élek) halmaza
f_i	- redundánsan merev tartónak a törzstartóképzés során i-edikként eltávolított fölös rúdja (gráfban i-edik redundáns él)
$G(V,E)$	- a V csomóponthalmazból és az E élhalmazból álló gráf
h	- redundánsan merev tartó statikai határozatlanságának foka
$L(f_i)$	- az f_i fölös rúdhoz tartozó magláncolat
$M(V)$	- tetszőleges V csomóponthalmaz merev magja

r	- a tartó rúdjainak száma
$r(B(\mathrm{v}_i))$	- a $B(\mathrm{v}_i)$ befolyásolt zóna rúdjainak száma
s	- a tartó geometriai érzékenysége
s_i	- a rácsos tartó sorozat i-edik tagjának geometriai érzékenysége
$S(\mathrm{f}_i)$	- az f_i fölös rúdhoz tartozó sajátfeszültségi zóna
T_i	- i darab rácsos tartóból álló sorozat (tartócsalád) jele, vagy annak i-edik eleme
v_i	- i-edik csukló (gráfban csomópont)
V (mint „vertex”)	- (tetszőlegesen kiválasztott) csuklóhalmaz (gráfban csomóponthalmaz) jele
$V(\mathrm{f}_i)$	- az f_i fölös rúddal szomszédos csuklók (gráfban csomópontok) halmaza
$V(\mathrm{v}_i)$	-a v_i csomóponttal szomszédos csuklók (gráfban csomópontok) halmaza

2. sz. melléklet:
RÁCSOS TARTÓKKAL KAPCSOLATOS FOGALMAK

Aktív rúd:

Olyan rúd, amelyben zérustól eltérő (elsőrendű elmélettel számítható) rúderő lép fel – tehát nem vakrúd

Aktív zóna:

Egy merev rácsos tartónak azt a rúdhalmazát (valamint a hozzá kapcsolódó csomópontokat), amelyben egy tetszőleges V csomóponthalmazon működő tetszőleges egyensúlyi külső erőrendszer elsőrendben rúderőket indukál, a *V csomóponthalmaz aktív zónájá*nak hívjuk; jele: $A(V)$.

Befolyásolt zóna:

Ha egy terhelt tartóban egy terheletlen v_i jelű csomópont helyzete a tervezettől eltér, akkor bizonyos rudakban a rúderő eltér a tervezett, eredeti geometria alapján számolt rúderőtől. Az említett rúdhalmazt (valamint a hozzá kapcsolódó csomópontokat) a v_i *csomópont befolyásolt zónájá*nak hívjuk; jele: $B(\mathrm{v}_i)$.

Belső csomópont:

Olyan csomópont, amely nem érintkezik a megtámasztó környezettel.

Belső erőrendszer:

A rácsos tartó rúderői által alkotott erők rendszere.

Bővített merev mag:

Az $M(V(\mathrm{f}_i))$ merev magból és az f_i fölös rúdból képzett uniót a $V(\mathrm{f}_i)$ *bővített merev magjá*nak nevezzük, jele: $\overline{M}(V(\mathrm{f}_i))$.

Egymást csomópontban metsző tartórészek:

Két tartórész csomópontban metszi egymást, ha van közös csomópontjuk.

Egymást rúdban metsző tartórészek:

Két tartórész rúdban metszi egymást, ha van közös rúdjuk.

Fokszám:

Adott csomópont fokszáma megegyezik a csomóponttal szomszédos rudak számával.

Fölös rúd:

Olyan rúd, amely eltávolítható a tartóból anélkül, hogy a tartó elvesztené merevségét. Valamint: olyan rúd, amelyet egy redundánsan merev tartóból eltávolítunk törzstartóképzés céljából.

Geometriai érzékenységi index (röviden: érzékenység):

Az érzékenység egy a tartóra jellemző $0 \leq s \leq 1$ skalár mérőszám, ami a belső csomópontokhoz tartozó befolyásolt zónák átlagos rúdszámának és a tartó rúdszámának a hányadosa, jele s. Az érzékenység matematikai képlete:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{c} r(B(\mathrm{v}_i))}{c * r}$$

ahol c a tartó belső csomópontjainak számát, r a tartó rúdszámát, $r(B(\mathrm{v}_i))$ a $B(\mathrm{v}_i)$ befolyásolt zóna rúdszámát jelöli.

Külső csomópont:

Olyan csomópont, amely érintkezik a megtámasztó környezettel.

Külső erőrendszer:

A rácsos tartón működő erőjellegű terhekből és a támaszerőkből álló (egyensúlyi) erőrendszer.

Magláncolat:

A *tartó magláncolatai*t az $\overline{M}(V(\mathrm{f}_i))$ bővített merev magokból képezzük a következők szerint: minden bővített merev mag része egy, és csak egy magláncolatnak; az egymást legalább egy rúdban metsző bővített merev magok azonos magláncolatba kerülnek. $L(\mathrm{f}_i)$ jelöli azt a magláncolatot, amely f_i-t tartalmazza. Értelemszerűen, ha f_i és f_j azonos magláncolatba tartozik, akkor $L(\mathrm{f}_i) \equiv L(\mathrm{f}_j)$.

Merev mag:

Minimálisan merev rácsos tartó legalább kételemű *V csomóponthalmazának merev mag*ja a tartónak az a legkisebb (azaz legkevesebb rudat tartalmazó), összefüggő, minimálisan merev része, ami *V*-t tartalmazza; jele: $M(V)$. Megjegyzés: redundánsan merev esetekben a merev magot a tartó egy tetszőleges törzstartóján értelmezzük.

Merev tartó:

*Merev*nek nevezünk egy (előfeszítés nélküli állapotban lévő) tartót, ha – a merevtestszerű mozgásoktól eltekintve – nincsenek infinitezimális vagy véges szabad elmozdulásai, vagyis a szerkezet kinematikailag nem határozatlan.

Minimálisan merev (azaz éppen merev) rácsos tartó:

1. definíció: Olyan rácsos tartó, ami vagy statikailag határozott, vagy (ha nincs megtámasztva), akkor három darab megfelelően elhelyezett megtámasztó rúddal statikailag határozottá tehető.

2. definíció: Olyan merev rácsos tartó, amelynek bármely rúdját eltávolítva megszűnik a merevsége (tehát a tartónak csak szükséges rúdjai vannak).

Összefüggőség:

Adott rácsos tartó egy része összefüggő, ha azon belül bármely csomópontból bármely csomópontba el lehet jutni rudakon vagy a fix, megtámasztó környezeten keresztül.

Rácsostartó-család:

Egy T_i rácsostartó-családot egy T_0 kiinduló rácsos tartóból az $f(\mathrm{T}_i)$ rekurzív bővítési lépések sorozatával képzünk. A család $(i+1)$-edik tagját tehát a következőképpen képezzük az i-edik tagból: $\mathrm{T}_{i+1}=f(\mathrm{T}_i)$.

Redundánsan merev (illetve túlmerev) rácsos tartó:

1. definíció: Olyan rácsos tartó, ami vagy statikailag határozatlan (és egyben kinematikailag túlhatározott), vagy ha nincs megtámasztva, akkor három darab megfelelően elhelyezett megtámasztó rúddal statikailag határozatlanná (és egyben kinematikailag túlhatározottá) tehető.

2. definíció: Olyan merev tartó, amelynek *létezik* olyan rúdja, amely eltávolítható anélkül, hogy a tartó elvesztené merevségét (tehát a tartónak van fölös rúdja is).

(Megjegyezzük, hogy a gráfelméletben a „redundáns merevség” fogalma alatt a következőt értik: egy gráf redundánsan merev, ha bármely élét eltávolítva megszűnik a gráf merevsége.)

Sajátfeszültségi állapot:

Egy egyensúlyban lévő tartónak az az állapota, amikor külső erők működése nélkül ébrednek zérustól eltérő belső erők.

Sajátfeszültségi zóna:

A *tartó egy sajátfeszültségi zónájá*nak hívjuk a tartónak egy rúdhalmazát (valamint a kapcsolódó csomópontokat), ha tetszőleges egyparaméteres kinematikai teherre megvalósul, hogy a zónában a rúderők önmagukat képesek kiegyensúlyozni, és erre a tulajdonságra nézve a rúdhalmaz minimális, azaz nincs olyan része, ami ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik. $S(\mathrm{f}_i)$ jelöli azt a sajátfeszültségi zónát, amely f_i fölös rudat tartalmazza. Értelemszerűen, ha f_i és f_j fölös rudak azonos sajátfeszültségi zónába tartoznak, akkor $S(\mathrm{f}_i) \equiv S(\mathrm{f}_j)$.

Szükséges rúd:

Olyan rúd, amelyet egy merev tartóból eltávolítva a tartó elveszti merevségét.

Tipikus feladat (illetve tipikus szerkezet):

Egy diszkréten változó tulajdonság – például a merevség – szempontjából tipikusnak nevezünk egy feladatot (illetve szerkezetet), ha a metrikus bemenő adatokban (ilyen például egy csomóponti koordináta vagy egy csomóponti teher hatásvonala) bekövetkező elegendően kis változás az adott tulajdonság – például a merevség – szempontjából nem idéz elő változást.

3. sz . melléklet:
GRÁFELMÉLETI FOGALMAK

Fa:

1. definíció: Olyan összefüggő gráf, amelyben nincs kör.
2. definíció: Olyan gráf, amelynek bármely két csomópontját pontosan egy út köti össze.

Feszített részgráf:

Egy gráf egy feszített részgráfját úgy kapjuk, ha vesszük a gráf egy bizonyos csomóponthalmazát, és minden köztük futó élt.

Feszítőfa:

Egy gráf feszítőfája egy olyan fa, amely az adott gráf összes pontját tartalmazza.

Fokszám (csomóponté):

Egy csomópont fokszáma megegyezik a csomópontba befutó élek számával.

Fokszám (gráfé):

Egy gráf fokszáma megegyezik a gráf legkisebb fokszámmal rendelkező csomópontjának fokszámával.

Gráf:

Csomópontok és élek együttese. Jele: G. A csomópontok helyzete és az élek alakja tetszőleges lehet.

Kör:

Ha az út visszatér a kiindulópontba, akkor az egy kör.

M-kör (a síkban):

Olyan (rész)gráf, melynek *bármely* élét eltávolítva minimálisan merev (rész)gráfhoz jutunk.

M-komponens:

Egy gráfnak lehetnek triviális és nem-triviális *M*-komponensei is. A nem-triviális *M*-komponens egy olyan részgráf, amelyben bármely 2 él benne van egy *M*-körben. Amely él egyetlen *M*-körben sincs benne, az egy triviális *M*-komponens.

Merev gráf:

Egy gráfot merevnek nevezünk, ha létezik olyan merev rácsos tartó, aminek az adott gráf a gráfmodellje. Más szóval: ha a gráfnak létezik merev geometriai megvalósítása.

Minimálisan merev gráf:

Olyan merev gráf, amelynek bármely élét eltávolítva megszűnik a merevsége.

Redundánsan merev gráf:

Olyan gráf, amelynek létezik olyan éle, amelyet eltávolítva nem szűnik meg a gráf merevsége.

(Megjegyezzük, hogy a gráfelméletben a *redundánsan merev gráf* fogalmát másképp használják: a redundánsan merev gráf olyan merev gráf, amelynek bármely élét eltávolítva nem szűnik meg a gráf merevsége.)

Részgráf:

Egy gráf részgráfja olyan csomópontok és élek halmaza, melyek elemei a gráf csomóponthalmazának, illetve élhalmazának.

Összefüggőség:

Egy gráf összefüggő, ha bármely csomópontból bármely csomópontba út vezet.

Teljes gráf:

Olyan gráf, amelyben minden csomópontpárt él köt össze.

Út:

Az olyan útvonalat, amely egy csomóponton legfeljebb egyszer megy át, útnak nevezzük.

Útvonal:

Két csúcs (azaz csomópont) között van útvonal, ha az egyik csomópontból el lehet jutni a másik csomópontba éleken és csomópontokon keresztül.

4. sz. melléklet:
SEGÉDTÉTELEK ÉS BIZONYÍTÁSUK
(A segédtételek síkbeli esetekre vonatkoznak.)

1. segédtétel:
Ha egy minimálisan merev tartó két minimálisan merev része egymást legalább két csomópontban metszi, akkor van közös rúdjuk is.
Bizonyítás:

A szóban forgó két, egymást metsző, minimálisan merev tartórészt jelöljük D_1-gyel és D_2-vel, a metszetüket pedig D_3-mal, továbbá jelöljük n-nel azoknak a csomópontoknak a számát, amelyek D_1-nek és D_2-nek is elemei.

Tegyük fel, hogy D_3 nem tartalmaz rudat. Ekkor D_1 és D_2 között kizárólag csomópontok teremtenek kapcsolatot. Tekintve hogy D_1 és D_2 is egy-egy merev tartórész, azok a merevségi tulajdonságok szempontjából modellezhetők egy-egy rúddal. Az állítás alapján $n \geq 2$, vagyis a modellként használt két rudat legalább két csomópont köti össze. Ismert, hogy az utóbbi formációk redundánsan merevek, ebből következően a $D_1 \cup D_2$ is redundánsan merev, ami ellentmondás, hiszen egy minimálisan merev szerkezetnek nem lehetnek redundánsan merev részei. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

2. segédtétel:
Ha egy minimálisan merev tartó két minimálisan merev része egymást legalább egy rúdban metszi, akkor a metszetük is minimálisan merev.
(Megjegyezzük, hogy az állítás egy másik, matematikai bizonyítása a *(Jackson és Jordán 2005)*-ben is megtalálható.)
Bizonyítás:

A szóban forgó két, egymást metsző, minimálisan merev tartórészt jelöljük D_1-gyel és D_2-vel, a metszetüket pedig D_3-mal.

Tegyük fel, hogy D_3 nem minimálisan merev. Ekkor a következő esetek lehetségesek:

b) D_3 redundánsan merev. Ez nem lehetséges, mert egy minimálisan merev szerkezetnek nem lehetnek redundánsan merev részei.

c) D_3 nem merev, azaz statikailag túlhatározott. E túlhatározottságot azonban megszünteti akár $D_1 \backslash D_3$, akár $D_2 \backslash D_3$ hozzáadása is, tehát $D_1 \cup D_2$ redundánsan merev. Mivel $D_1 \cup D_2$ is a teljes szerkezet része, ez az eset is ellentmondásra vezet.

Ezzel bizonyítottuk az állítást.

3. segédtétel:
Az M(V) merev mag minden esetben létezik és egyértelmű.
Bizonyítás:

A merev mag definíció szerint minimálisan merev. A V csomóponthalmaznak mindig van olyan kiegészítése, amelyik egy minimálisan merev szerkezet, hiszen a teljes szerkezet teljesíti ezt a feltételt.

Tegyük fel, hogy két különböző merev magot találunk: M_1 és M_2 merev magot. E két mag rúdszáma azonos, hiszen a definícióban szerepel a minimális számú rúddal való kiegészítés. Emellett pedig M_1 és M_2 legalább két csomópontban metszik egymást, hiszen legalább a V halmaz közös (V a merev mag definíciója szerint legalább kételemű). A két mag metszetét jelöljük M_3-mal. Az 1. Segédtétel értelmében M_3 legalább egy rudat tartalmaz, ebből viszont – a 2. Segédtétel alapján – következik, hogy M_3 minimálisan merev. Ez esetben a kiinduló feltételezésünkkel ellentétben M_1 és M_2 nem volt merev mag, hiszen kevesebb rúddal is ki lehetett egészíteni a V halmazt úgy, hogy minimálisan merev tartórészhez jussunk. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

4. segédtétel:

Minimálisan merev tartónak bármely olyan minimálisan generikusan merev R része, ami V csomóponthalmazt tartalmazza, egyben M(V) merev magot is tartalmazza (V egy legalább kételemű, tetszőlegesen kiválasztott halmaz).

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy R nem tartalmazza $M(V)$-t. Mivel V kételemű, valamint eleme R-nek és $M(V)$-nek is, ezért $R \cap M(V)$ az 1. és a 2. Segédtétel értelmében minimálisan merev. Tekintve hogy V eleme R-nek és $M(V)$-nek is, azért V eleme $R \cap M(V)$-nek is. Ez esetben a kiinduló feltételezésünkkel ellentétben $M(V)$ nem volt merev mag, hiszen kevesebb rúddal is ki lehetett egészíteni a V halmazt úgy, hogy minimálisan merev tartórészhez jussunk. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

5. segédtétel:

Képezzük egy minimálisan merev tartóban egy legalább háromelemű, tetszőlegesen kiválasztott V csomóponthalmaz egymással nem szomszédos csomópontpárjainak merev magjait, majd egyesítsük az utóbbi merev magokat. Az így nyert unió egybeesik az M(V) merev maggal.

Bizonyítás:

Jelölje a V csomóponthalmaz két, egymással nem szomszédos, tetszőleges csomópontját v_1 illetve v_2, valamint jelölje $M(v_1,v_2)$ a (v_1,v_2) csomópontpár merev magját.

Először tegyük fel, hogy $M(v_1,v_2)$ nem eleme $M(V)$-nek. Az $M(V) \cap M(v_1,v_2)$ metszetről tudjuk, hogy létezik, és legalább két csomópontot tartalmaz: v_1-et illetve v_2-t. Ebből kifolyólag az 1. és a 2. Segédtétel értelmében $M(V) \cap M(v_1,v_2)$ minimálisan merev. Ez esetben a kiinduló feltételezésünkkel ellentétben $M(v_1,v_2)$ nem volt merev mag, hiszen kevesebb rúddal is ki lehetett egészíteni a $\{v_1,v_2\}$ halmazt úgy, hogy minimálisan merev tartórészhez jussunk. Ezzel bebizonyítottuk, hogy bármely $M(v_1,v_2)$ eleme $M(V)$-nek.

Ezután bizonyítsuk be, hogy az összes, egymással nem szomszédos $\{v_i,v_j\}$ csomópontpárok $M(v_i,v_j)$ merev magjaiból képzett unió – melyet jelöljünk $\cup M(v_i,v_j)$-vel – minimálisan merev. Vegyük észre, hogy az $\cup M(v_i,v_j)$-ben a V csomóponthalmaz tetszőlegesen kiválasztott két csomópontja vagy szomszédos egymással (azaz egyetlen rúd köti őket össze), vagy egy $M(v_i,v_j)$ merev mag kapcsolja őket össze, ebből következően $\cup M(v_i,v_j)$ egy összefüggő, minimálisan merev tartórész, hiszen V minden csomópontja mereven kapcsolódik egymáshoz.

Tehát $\cup M(v_i,v_j)$ részhalmaza $M(V)$-nek, és minimálisan merev, ugyanakkor nyilvánvalóan tartalmazza V minden elemét. Mivel $M(V)$ merev magja V-nek, $\cup M(v_i,v_j)$ nem lehet valódi részhalmaza $M(V)$-nek, hanem a két halmaz azonos.

6. segédtétel:

Tekintsük egy minimálisan merev rácsos tartó v_i *csomópontját. Amennyiben* v_i *legalább harmadfokú, akkor* v_i *eleme az* $M(V(v_i))$ *merev magnak.*

Bizonyítás:

Tegyük fel az állítás ellenkezőségét, vagyis hogy az $M(V(v_i))$ merev mag nem tartalmazza a v_i csomópontot. Jelölje $E(v_i)$ a v_i-vel szomszédos rudak halmazát, és képezzük az $M(V(v_i)) \cup E(v_i) \cup v_i$ uniót. Tekintve hogy $M(V(v_i))$ merev mag minimálisan merev, valamint az $E(v_i)$ legalább 3 rudat tartalmaz, ezért az $M(V(v_i)) \cup E(v_i) \cup v_i$ unió legalább egyszeresen határozatlan, ami ellentmondás, hiszen minimálisan merev rácsos tartónak nem lehetnek statikailag határozatlan részei. Ezzel bebizonyítottuk a segédtételt.

5. sz. melléklet:
A FELHASZNÁLT FÉNYKÉPEK FORRÁSAI

2.17 ábra

a1): http://commons.wikimedia.org/wiki
http://forum.index.hu/Article/showArticle?go=48730274&t=9023878

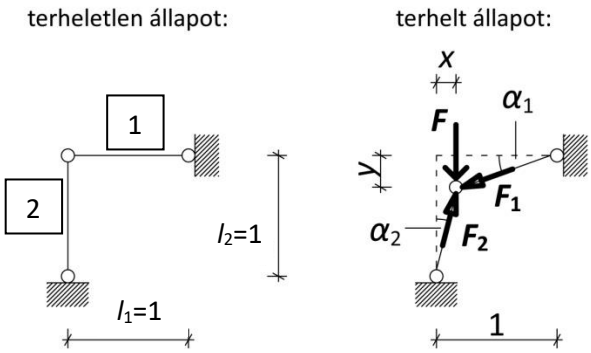
a2): Herzog, Natterer, Schweitzer, Winter, Volz: Holzbau Atlas (Edition Detail), 2003, Kösel Gmbh & Co. KG, Kempten

b): Vámossy Ferenc: Az építészet története – A Modern Mozgalom és a Későmodern, Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, 2002
http://ferb.buzznet.com/user/photos/pompidou-center-section/?id=1983370
c): http://vasutihid.hu/legifoto.html
d): Herzog, Natterer, Schweitzer, Winter, Volz: Holzbau Atlas (Edition Detail), 2003, Kösel Gmbh & Co. KG, Kempten
e): -
f): http://bonnievilleky.blogspot.com/2010/04/old-pillar-over-green-river-in.html
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bridges_20.png
g): http://www.airshipsonline.com/sheds/images/krchshed.jpg
O. Büttner, H. Stenker: Stahlhallen Entwurf und Konstruktion, VEb Verlag für Bauwesen, Berlin, 1986
h): http://hu.wikipedia.org/wiki/K-h%C3%ADd
i): http://fineartamerica.com/featured/bollman-truss-bridge-at-savage-in-maryland-william-kuta.html
http://www.historicbridges.org/maryland/bollman/

6. sz. melléklet:

EGY HARMADRENDBEN ELFAJULT VAKRÚD RENDJÉNEK MEGATÁROZÁSA KÉZI KÖZELÍTŐ MÓDSZERREL, SORFEJTÉSSEL

Határozzuk meg az alábbi ábrán látható szerkezetben az 1. jelű vakrúdban fellépő $\boldsymbol{F}_1$ rúderő és az $\boldsymbol{F}$ teher közötti összefüggést!



Tegyük fel, hogy $\alpha_1 \ll 1$.

Legyen: $A_1=A_2=1$ a rudak keresztmetszet-területe,

E_1 illetve E_2 az 1. jelű rúd illetve a 2. jelű rúd rugalmassági modulusa,

Δl_1 illetve Δl_2 az 1. jelű rúd illetve a 2. jelű rúd hosszváltozása a terhelés hatására,

l_1' illetve l_2' az 1. jelű rúd illetve a 2. jelű rúd megváltozott hossza a terhelés után,

$F_{1,x}$ illetve $F_{1,y}$ az 1. jelű rúdban ébredő rúderő vízszintes illetve függőleges komponense,

$F_{2,x}$ illetve $F_{2,y}$ a 2. jelű rúdban ébredő rúderő vízszintes illetve függőleges komponense,

a további jelöléseket lásd a fenti ábrán.

Felhasználva, hogy az α_1 illetve α_2 szögeket tartalmazó függvények Taylor-sorba fejthetők a másodrendű taggal bezárólag, az alábbi összefüggések írhatók le a geometria, az anyagtörvények és az egyensúlyi egyenletek alapján:

$$l_1' = 1 - \Delta l_1 = 1 - \frac{F_1}{E_1 A_1} = 1 - \frac{F_1}{E_1}$$

$$x = 1 - l_1' * \cos \propto_1 = 1 - \left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right)\left(1 - \frac{\propto_1{}^2}{2}\right) = \frac{\propto_1{}^2}{2}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) + \frac{F_1}{E_1}$$

$$y = l_1' * sin \propto_1 = \left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1$$

$$l_2' = \frac{1-y}{cos \propto_2} = 1 - y = 1 - \left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1$$

$$x = l_2' * sin \propto_2 = \left[1 - \left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1\right] \propto_2 = \propto_2$$

$$x = \propto_2 = \frac{\propto_1{}^2}{2}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) + \frac{F_1}{E_1}$$

$$F_2 = \frac{\Delta l_2 E_2 A_2}{l_2} = (1 - l_2')E_2 = \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1\right]\right\} E_2 = E_2\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1$$

$$\propto_1 = \frac{F_2}{E_2(1 - \frac{F_1}{E_1})}$$

$$F_{2,x} = F_2 sin \propto_2 = E_2\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1 \propto_2 = E_2\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1 \left[\frac{\propto_1{}^2}{2}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) + \frac{F_1}{E_1}\right] =$$

$$= \frac{E_2}{2}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right)^2 \propto_1{}^3 + \frac{E_2 F_1}{E_1}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1$$

$$F_{2,x} = F_{1,x} = F_1 cos \propto_1 = F_1$$

$$F_{2,y} = F_2 cos \propto_2 = F_2 = F$$

$$F_1 = F_{2,x} = \frac{E_2}{2}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right)^2 \propto_1{}^3 + \frac{E_2 F_1}{E_1}\left(1 - \frac{F_1}{E_1}\right) \propto_1$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a szerkezetben a rúdmerevségek aránya $E_1/E_2 \to \infty$ szerint alakul, valamint $F_1/E_1 \to 0$. Ekkor:

$$F_1 = F_{2,x} = \frac{E_2}{2} \propto_1{}^3$$

valamint:

$$F_2 = E_2 \propto_1$$

ezért:

$$F_1 = \frac{E_2}{2} \propto_1{}^3 = \frac{E_2}{2}\left(\frac{F_2}{E_2}\right)^3 = \frac{F_2{}^3}{2 * E_2{}^2} = \frac{F^3}{2 * E_2{}^2}$$

tehát:

$$F_1 \sim F^3$$

Másodszor vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a vakrúdban fellépő erő nagysága tart 0 zérushoz, azaz: $F_1 \to 0$. Ekkor ugyanazt kapjuk, mint az előző esetben, azaz:

$$F_1 \sim F^3$$

Ezzel kimutattuk, hogy igen kicsi vakrúderő esetén, vagy amennyiben a vakrúd rugalmassági modulusa nagyságrendekkel nagyobb a másik rúd rugalmassági modulusánál, akkor a vakrúdban fellépő erő a teherparaméter harmadik hatványával arányos.

Budapest, 2014. február 28.

Tóth Krisztina